PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 4 — 15. Februar 1936. Redaktionsschluß für Nr. 6 am 1. März 1936. — 37. Jahrgang

INHALT.

Abhandlungen:

S. Erk und H. Eck, Über die Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit von Schmierölen. S. 113.

J. Fischer, Zur Definition von physikalischen Größen in Gleichungen, Einheiten, Benennungen, Dimensionen, Größengleichungen usw. S. 120.

E. Elvegård, Über den Zusammenhang zwischen Beleuchtung und Stromstärke bei Sperrschichtphotozellen. S. 129.

O. E. Frivold, O. Hassel und T. Skjulstad, Brechungsexponent und Molrefraktion des Selenwasserstoffs und des Selendeuterids. S. 134.

E. Hückel, Bemerkung zur Thomsonschen Theorie der Kondensation an Ionen. S. 137.

H. Ertel, Gravitationskonstante und Zahl der Massenteilchen im Weltall. S. 138.

W. Dieckvoß und K. Müller, Bemerkungen zu: „Die Lorentz-Transformation als ein Element der klassischen Mechanik" von Hugo Dingler und Max Steck. S. 139.

H. Dingler und Max Steck, Erwiderung auf die Bemerkungen der Herren Wilhelm Dieckvoß und Karl Müller. S. 139.

E. Baumgardt, Bemerkung zu der Arbeit von Hugo Dingler und Max Steck: „Die Lorentz-Transformation als ein Element der klassischen Mechanik". S. 140.

H. Dingler und M. Steck, Erwiderung auf die Bemerkung des Herrn Ernst Baumgardt. S. 141.

E. Baumgardt, Antwort auf die vorstehende Erwiderung der Herren Hugo Dingler und Max Steck. S. 142.

H. Dingler und M. Steck, Schlußwort auf die vorstehende Erwiderung von Herrn Baumgardt. S. 142.

Besprechungen:

W. N. Bond, Probability and random errors. S. 143.

C. N. Hinshelwood und A. T. Williamson, The reaction between Hydrogen and Oxygen. S. 143.

M. Planck, Die Physik im Kampf um die Weltanschauung. S. 144.

Nachrichten. S. 144.

ABHANDLUNGEN.

Über die Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit von Schmierölen.

Von S. Erk und H. Eck.

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Einleitung.

Bei der Schmierung spielt neben dem Absolutwert der Zähigkeit des Schmieröls vor allem deren Temperaturabhängigkeit eine ausschlaggebende Rolle. So ist es z. B. bei der Schmierung im Kraftwagen oder Flugzeug wichtig, daß das verwendete Öl bei tiefen Temperaturen noch nicht zu zäh ist, um ein Anlassen des Motors zu verhindern, andererseits soll bei hohen Temperaturen die Zähigkeit des Öls nicht so klein werden, daß eine Zerstörung des Ölfilms eintreten kann. Daher sind Schmieröle mit kleinerer Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit grundsätzlich wertvoller als solche, deren Zähigkeit stark von der Temperatur abhängt. Je mehr nun auch in Verbraucherkreisen die Notwendigkeit erfaßt wurde, die Zähigkeit der Schmieröle in dem ganzen für die Verwendung in Frage kommenden Temperaturbereich zu kennen, desto stärker trat das Bedürfnis nach möglichst einfachen Formeln zur Darstellung der Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit zutage[1]).

Angesichts der außerordentlich großen Zahl von Öluntersuchungen, die Tag für Tag in den Industrielaboratorien ausgeführt werden müssen, strebt man natürlich danach, mit möglichst wenig Meßpunkten und mit möglichst einfachen mathematischen Hilfsmitteln die gesamte Zähigkeitskurve zu erhalten. Andererseits darf die Unsicherheit der Interpolation nicht ein gewisses Maß überschreiten. Da wir in den Ölen, die zur Prüfung von Viskosimetern dienen, über geeignete Stoffe verfügen, deren Zähigkeit in

1) Vgl. S. Erk, Kapitel „Zähigkeitsmessungen" im Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, S. 461–604, Leipzig 1932; E. Hatschek, Die Viskosität der Flüssigkeiten, S. 611., Dresden und Leipzig 1929.

dem Bereich von etwa 20–80° mit der größten bis heute auf diesem Sondergebiet erreichten Genauigkeit bekannt ist, schien es uns angebracht, die Genauigkeit und die Grenzen der Verwendbarkeit einiger in neuerer Zeit vielfach gebrauchter Formeln zu untersuchen. Außer der von uns selbst seit vielen Jahren mit Erfolg verwendeten Formel von Vogel, die drei Bestimmungsstücke enthält, wollten wir in erster Linie die von Walther vorgeschlagene Formel prüfen, zu deren Auswertung man nur zwei Meßpunkte braucht. Außerdem haben wir noch die Formel von Andrade untersucht, die in zahlreichen neueren Arbeiten über die Zähigkeit von Flüssigkeiten verwendet wurde.

Formeln zur Berechnung der Temperaturabhängigkeit.

1. Die Formel von Vogel.

Vogel[1]) hat für die Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit von Flüssigkeiten die Beziehung aufgestellt:

$$\left(\frac{\eta}{\eta_\infty}\right)^{t-t_\infty} = k; \qquad (1)$$

darin bedeutet η die dynamische Zähigkeit bei der Temperatur t° C, η_∞ den Grenzwert der asymptotisch bei sehr hoher Temperatur erreichten Zähigkeit (vgl. Abb. 1), t_∞ die Grenztemperatur, bei der die Zähigkeit unmeßbar groß wird und endlich k eine der Flüssigkeit eigene Konstante. Die Größen η_∞ und t_∞ haben nur die geometrische Bedeutung einer Asymptote (siehe S. 119); sie stehen weder mit der Siedetemperatur noch mit der Erstarrungstemperatur in Beziehung. Durch die Einführung

$$t_1 = t_\infty - \frac{\log k}{\log \eta_\infty} \qquad (2)$$

geht die Vogelsche Formel in die für Berechnungen bequemste Form:

$$\log \eta = \frac{t - t_1}{t - t_\infty} \log \eta_\infty \qquad (3)$$

über.

Darin bedeutet t_1 jene Temperatur, bei der die Zähigkeit gleich 1 cP wird[2]). Aus den bei drei Temperaturen t_2, t_3 und t_4 gemessenen Zähigkeiten η_2, η_3 und η_4 kann man die drei Konstanten der Gleichung (3) wie folgt berechnen, wenn man $\log \eta_2 = a$, $\log \eta_3 = b$ und $\log \eta_4 = c$ setzt:

$$t_\infty = \frac{(a-b)(t_2-t_4)t_3 - (a-c)(t_2-t_3)t_4}{(a-b)(t_2-t_4) - (a-c)(t_2-t_3)}, \qquad (4)$$

$$\log \eta_\infty = \frac{a(t_2-t_\infty) - b(t_3-t_\infty)}{t_2-t_3}, \qquad (5)$$

$$t_1 = t_3 - \frac{b(t_3-t_\infty)}{\log \eta_\infty}. \qquad (6)$$

2. Die Formel von Andrade.

Auf Grund molekulartheoretischer Überlegungen leitete Andrade[1]) für Flüssigkeiten die folgende Gleichung ab:

$$\left(\frac{\eta}{\eta_\infty}\right)^T = k', \qquad (7)$$

worin η_∞ wie oben der Grenzwert der Zähigkeit bei $T = \infty$, $T = t + 273{,}2$ die absolute Temperatur und k' wiederum eine Stoffkonstante bedeuten. Führt man ein:

$$t_1 = -273{,}2 - \frac{\log k'}{\log \eta_\infty}, \qquad (8)$$

so kann man Gleichung (7) in die Form bringen:

$$\log \eta = \frac{t - t_1}{t + 273{,}2} \cdot \log \eta_\infty. \qquad (9)$$

Gleichung (9), zu deren Bestimmung im Gegensatz zu der Vogelschen Formel zwei Meßpunkte genügen, geht aus der Vogelschen Gleichung (3) hervor, wenn man t_∞ für alle Flüssigkeiten gleich $-273{,}2$ setzt; somit ist Gleichung (9) ein Sonderfall der Vogelschen Formel.

3. Die Formel von Walther.

Von neueren Formeln verdient noch Beachtung die von Walther[2]) empirisch abgeleitete Formel:

$$(\nu + a)^{(T^m)} = k''. \qquad (10)$$

Darin ist $\nu = \eta/\varrho$ die kinematische Zähigkeit, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, T die absolute Temperatur, a, m und k'' sind Konstanten.

Eine ähnliche Formel hatte bereits früher Le Chatelier[3]) angegeben. Er fand, daß sich die von English[4]) gemessene Temperatur-

1) H. Vogel, Physik. Zeitschr. **22**, 645, 1921.
2) 1 cP = 1 Zentipoise = 0,01 Poise = 0,01 [cm^{-1} g s^{-1}]. Wasser besitzt bei 20,2° die Zähigkeit 1 cP.

1) E. N. da C. Andrade, Nature **125**, 309, 1930.
2) C. Walther, Maschinenbau **10**, 671, 1931.
3) Le Chatelier, C. R. **179**, 517 u. 718, 1924; Ann. de phys. (10) **3**, 5, 1925.
4) S. English, Journ. Soc. Glass. Technol. 9, 83, 1925.

abhängigkeit der Zähigkeit von Gläsern sehr gut durch den Ansatz:

$$\log\log\eta = N - M\log T \qquad (11)$$

darstellen läßt.

Die Gleichung (10) bringt Walther für den Gebrauch in die logarithmische Form:

$$\log\log(\nu + a) = \log\log k'' - m\log T. \qquad (12)$$

Unter bewußter Beschränkung der Gültigkeit auf Öle mit einer Zähigkeit von über 50 Zentistok[1]) bei 20° vereinfachte Walther die Formel dadurch, daß er den Wert a für alle Öle zunächst gleich 0,95 und später auf Grund einer Zusammenarbeit mit dem amerikanischen Materialprüfungsverband (American Society for Testing Materials) gleich 0,8 festlegte. Mit dieser Vereinfachung ergibt sich aus der Waltherschen Formel der Grenzwert der kinematischen Zähigkeit für $T = T_\infty$ zu $\nu_\infty = 0{,}2$ cSt.

Die Formel von Walther kann rechnerisch oder graphisch ausgewertet werden. Trägt man Gleichung (12) in ein von Ubbelohde und Walther entworfenes „Viskositäts-Temperatur-Blatt“[2]) ein, das als Abszisse die Logarithmen der absoluten Temperatur und als Ordinate die Werte $\log\log(\nu + 0{,}8)$ enthält, so ergibt sich eine Gerade, die „Viskositätsgerade“; die Konstante m ist die Steigung („Richtungskonstante“ nach Walther) dieser Geraden. Nach Ubbelohde und Walther schneiden sich die verlängerten Geraden für Schmieröle gleicher Herkunft in einem Punkte, dem sogenannten „Viskositätspol“ der betreffenden Ölreihe. Die Viskositätspole verschiedener Ölreihen sollen wiederum nach Ubbelohde und Walther genügend genau auf einer Geraden, der „Polgeraden“, liegen, die die folgende Gleichung hat:

$$\log T_p = 2{,}410 - 0{,}194\, W_p. \qquad (13)$$

Darin ist $\log\log(\nu_p + 0{,}8) = W_p$ die „Polhöhe“.

Prüfung der Formeln mit Normalölen.

An der Reichsanstalt dienen zur Prüfung von Zähigkeitsmessern eine Anzahl von Ölen (im folgenden kurz als „Normalöle“ bezeichnet), deren Zähigkeit im Temperaturbereich von 20 bis 80° C mit einem Fundamentalviskosimeter[3]) ausgemessen ist. Die Unsicherheit der Messungen beträgt für diese Öle, die bei 20° C Zähigkeitswerte von etwa 15 bis 11000 cP aufweisen, etwa ± 0,5 Proz. In den Tabellen I–XII ist der Vergleich der nach den Formeln von Vogel, Walther und Andrade berechneten Werte mit den Meßwerten (Spalte 2) für zwölf verschiedene Öle durchgeführt; dabei bedeutet Walther I die Waltersche Formel mit $a = 0{,}8$, Walther II die Formel mit verändertem, den Meßwerten besser angepaßtem a; weiter bedeutet ein Stern, daß die betreffenden Meßpunkte bei der Berechnung der Formelkonstanten zugrunde gelegt wurden,

$$\Delta\eta = 100\,\frac{\eta\text{ berechnet} - \eta\text{ gemessen}}{\eta\text{ gemessen}}$$

die prozentuale Abweichung des berechneten vom gemessenen Wert. Die Andradesche Formel wurde für alle Öle berechnet, aber nur bei einigen die Ergebnisse eingetragen.

Tabelle I.

Öl 1935/2.

Vogel: $\log\eta = \dfrac{t - 143{,}523}{t + 96{,}721}\,(-1{,}09971)$.

Walther I: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 4{,}207\,(2{,}46716 - \log T) + 0{,}091705$.

Walther II: $\log\log(\nu + 0{,}5795) = 4{,}381\,(2{,}46716 - \log T) + 0{,}089730$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.		
		Vogel	Walther I	Walther II
20,00	14,584	*	*	*
40,02	6,799	*	+0,9	*
59,99	3,858	−0,5	*	−0,1
80,01	2,485	*	−4,7	*

Tabelle II.

Öl 1930/1.

Vogel: $\log\eta = \dfrac{t - 148{,}112}{t + 93{,}211}\,(-1{,}05099)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 4{,}343\,(1{,}43683 - \log T) + 0{,}23152$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
0,42	45,48	*	*
20,12	15,38	*	+1,6
40,15	7,093	*	*

[1]) 1 Zentistok = 1 cSt = 0,01 Stok = 0,01 [cm² s⁻¹].

[2]) L. Ubbelohde, Zur Viskosimetrie, Verlag Mineralölforschung, Berlin 1935.

[3]) S. Erk, a. a. O. und Forsch.-Arb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, Nr. 288, Berlin 1927.

Tabelle III.

Öl 1930/2.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 203{,}691}{t + 87{,}003}\,(-1{,}06610)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 3{,}973\,(2{,}46685 - \log T) + 0{,}27784$.

Andrade: $\log \eta = \frac{1926{,}73}{T} - 4{,}74116$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.		
		Vogel	Walther	Andrade
19,99	67,677	*	*	*
40,05	23,661	*	+ 1,0	+ 8,5
59,75	11,109	*	*	*
80,02	6,146	− 1,16	− 1,6	− 15,9

Tabelle IV.

Öl 1934/4.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 201{,}529}{t + 101{,}875}\,(-1{,}35515)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 3{,}864\,(2{,}46993 - \log T) + 0{,}30348$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
22,07	91,644	*	*
40,01	34,50	+ 1,1	+ 0,95
59,99	15,31	*	*
79,99	8,047	*	+ 0,8

Tabelle V.

Öl 1934/3.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 199{,}905}{t + 79{,}868}\,(-1{,}17606)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 4{,}288\,(2{,}46737 - \log T) + 0{,}33205$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
20,34	128,06	*	*
40,01	37,04	*	+ 1,4
54,97	18,44	− 0,4	+ 0,2
60,11	14,99	− 0,3	*
69,85	10,51	*	− 0,3

Tabelle VI.

Öl 1929/1.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 211{,}18}{t + 84{,}87}\,(-1{,}1677)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 4{,}048\,(2{,}46687 - \log T) + 0{,}33872$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
20,0	134,5	*	*
45,0	31,2	*	+ 1,1
60,48	16,30	− 0,3	*
70,0	11,6	*	± 0,0

Tabelle VII.

Öl 1930/3.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 229{,}04}{t + 77{,}99}\,(-1{,}1965)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 4{,}1675\,(2{,}46241 - \log T) + 0{,}43172$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
17,01	468,2	*	*
38,00	94,26	− 0,8	+ 1,2
51,22	44,50	− 0,4	+ 0,5
58,15	31,76	*	*
73,52	16,91	*	− 1,4

Tabelle VIII.

Öl 1934/1.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 261{,}876}{t + 109{,}404}\,(-1{,}40256)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 3{,}349\,(2{,}46531 - \log T) + 0{,}43302$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
18,955	451,21	*	*
40,29	119,17	*	± 0,0
59,90	47,12	+ 0,1	*
79,91	22,29	*	+ 0,7

Tabelle IX.

Rizinusöl 1932.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 249{,}11}{t + 109{,}15} (- 1{,}6880)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 3{,}500\,(2{,}45179 - \log T) + 0{,}53175$.

Andrade: $\log \eta = \frac{2680{,}97}{T} - 6{,}14013$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.		
		Vogel	Walther	Andrade
10	2440	*	*	− 13,1
18,10	1157	+ 0,3	+ 0,3	*
35,60	308,8	± 0,0	− 0,2	+ 12,8
43,47	188,1	*	*	+ 12,6
65,33	60,16	− 0,2	+ 1,3	*
78,77	33,89	*	+ 3,4	− 11,5

Tabelle X.

Rizinusöl 1935.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 260{,}367}{t + 105{,}597} (- 1{,}56606)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 3{,}518\,(2{,}46727 - \log T) + 0{,}47893$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
20,07	987,77	*	*
39,97	235,01	*	− 1,2
59,995	77,288	+ 1,6	*
80,01	33,303	*	− 0,6

Tabelle XI.

Öl 1935/1.

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 302{,}25}{t + 106{,}45} (- 1{,}45507)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 3{,}217\,(2{,}47422 - \log T) + 0{,}49397$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.	
		Vogel	Walther
10,985	1774,4	− 0,1	− 0,8
25,00	1172,2	*	*
40,02	402,79	*	+ 0,6
60,02	131,55	− 0,4	*
80,00	54,259	*	+ 1,5

Um zu prüfen, wieweit eine zeichnerische Extrapolation mit Hilfe der Waltherschen Formel statthaft ist, wurde aus je zwei verschiedenen Temperaturpunkten die „Viskositätsgerade" im „Viskositäts-Temperatur-Blatt"[1] ermittelt und daraus die „Richtungskonstante"

1) L. Ubbelohde, a. a. O.

Tabelle XII.

Öl 1935/0 (hydriertes Mineralöl).

Vogel: $\log \eta = \frac{t - 338{,}215}{t + 100{,}959} (- 1{,}53400)$.

Walther: $\log\log(\nu + 0{,}8) = 3{,}185\,(2{,}46706 - \log T) + 0{,}61149$.

Andrade: $\log \eta = \frac{3375{,}60}{T} - 7{,}48051$.

t° C	η cP	$\Delta\eta$ Proz.		
		Vogel	Walther	Andrade
20,13	10650	*	*	*
40,03	1755	*	+ 1,1	+ 12,7
60,15	442,4	+ 0,4	*	*
80,15	153,4	*	− 1,9	− 22,9

m, die „Polhöhe" W_p sowie die Abweichungen $\Delta\eta$ der beiden Viskositätsgeraden gegeneinander für 0 und 100° C bestimmt. Die Ergebnisse sind in den Tabellen XIII–XIX zusammengestellt. Das Verfahren wurde beschränkt auf Öle mit einer Zähigkeit von mehr als 50 cSt bei 20° C, ferner wurden Rizinusöl als Pflanzenöl und das Öl 1935/0 ausgenommen.

Tabelle XIII.

Öl 1930/2.

Zugrunde gelegte Temperatur in ° C	m	W_p	$\Delta\eta$ Proz.	
			0°	100°
20 u. 60	3,97	2,19	8	2
40 u. 80	3,90	2,05		

Tabelle XIV.

Öl 1934/4.

Zugrunde gelegte Temperatur in ° C	m	W_p	$\Delta\eta$ Proz.	
			0°	100°
20 u. 60	3,85	2,11	1	1
40 u. 80	3,86	2,11		

Tabelle XV.

Öl 1934/3.

Zugrunde gelegte Temperatur in ° C	m	W_p	$\Delta\eta$ Proz.	
			0°	100°
20 u. 60	4,27	3,32	5	1
40 u. 70	4,22	3,13		

Tabelle XVI.
Öl 1929/1.

Zugrunde gelegte Temperatur in °C	m	W_p	$\Delta\eta$ Proz.	
			0°	100°
20 u. 60	4,05	2,65	12	1
45 u. 70	3,98	2,48		

Tabelle XVII.
Öl 1930/3.

Zugrunde gelegte Temperatur in °C	m	W_p	$\Delta\eta$ Proz.	
			0°	100°
17 u. 58	4,19	3,50	13	3
38 u. 74	4,08	3,11		

Tabelle XVIII.
Öl 1934/1.

Zugrunde gelegte Temperatur in °C	m	W_p	$\Delta\eta$ Proz.	
			0°	100°
20 u. 60	3,36	1,26	2	1
40 u. 80	3,38	1,27		

Tabelle XIX.
Öl 1935/1.

Zugrunde gelegte Temperatur in °C	m	W_p	$\Delta\eta$ Proz.	
			0°	100°
25 u. 60	3,22	1,87	5	3
40 u. 80	3,25	1,90		

Ergebnis des Vergleichs.

Die Tabellen I—XII zeigen, daß die Formel von Andrade auch bei geringen Ansprüchen an die Genauigkeit ausscheidet, da sie Abweichungen in der Größenordnung von 10—20 Proz. ergibt. Damit wird die von Andrade[1]) selbst gemachte Einschränkung bestätigt, daß seine Formel gemäß ihrer theoretischen Ableitung nur für chemisch einheitliche Flüssigkeiten von geringem Assoziationsgrad gilt. Die Abweichungen der Vogelschen Formel sind im allgemeinen kleiner als 1 Proz. und betragen im Mittel etwa ±3 Promille, liegen also noch innerhalb der von uns beanspruchten Fehlergrenze der Messungen. Wegen dieser guten Übereinstimmung wird die Vogelsche Formel von uns als Interpolationsformel für Normalöle verwendet. Während eine Extrapolation der Vogelschen Formel nach höheren Temperaturen hin, also z. B. von 60 auf 80° oder von 80 auf 100° C, kaum größere Fehler als ± 1 Proz. ergibt, kann eine Extrapolation von 20° aus nach den tieferen Temperaturen hin weit größere Fehler als 1 Proz. zur Folge haben, da mit sinkender Temperatur die Zähigkeitskurve immer stärker gekrümmt wird.

Die Walthersche Formel weicht in dem betrachteten Temperaturgebiet durchweg um weniger als ± 2 Proz. von den Messungen ab, wenn man sich auf Schmieröle mit einer Zähigkeit von mehr als 50 eSt bei 20° beschränkt; sie ergibt stets einen flacheren Verlauf der Zähigkeitskurve, als der Wirklichkeit entspricht.

Die Tabellen XIII—XIX zeigen, daß, immer auf das betrachtete Temperaturgebiet von 20 bis 80° bezogen, bei der Berechnung der Konstanten bzw. bei der Zeichnung der „Viskositätsgeraden" im Viskositäts-Temperatur-Blatt, die oben angegebene Fehlergrenze nur dann eingehalten wird, wenn als Grundlage die Meßpunkte bei 20 und 60° benützt werden. Geht man von den Meßpunkten bei 40 und 80° C aus und extrapoliert auf 20° C, so ergeben sich schon erhebliche Fehler. Weiterhin erkennt man, daß die „Richtungskonstante" m und die „Polhöhe" W_p keine eindeutigen Konstanten für ein Öl darstellen, sondern ziemlich verschieden ausfallen können, je nach der Auswahl der der Rechnung zugrunde gelegten Meßpunkte. Da die Zähigkeit mit sinkender Temperatur immer mehr ansteigt, erhält man im allgemeinen aus den Meßpunkten bei 20 und 60° C größere „Richtungskonstanten" und größere „Viskositätspolhöhen" als aus den Meßpunkten bei 40 und 80° C; die Unterschiede würden noch größer, wenn man etwa 20 und 40° C einerseits und 60 und 80° C andererseits zugrunde legen würde. Die Frage, ob sich die Kurven von Ölen gleicher Herkunft auf der von Ubbelohde angegebenen „Polgeraden" schneiden, kann durch die vorliegende Untersuchung nicht geklärt werden, da Herkunft und Zusammensetzung der Normalöle unbekannt sind. Für ein sehr dünnes Öl (1935/2), das bei 20° C nur noch 14,6 cP besitzt, für das also die Voraussetzungen der Walther schen Formel nicht mehr zutreffen, konnte durch Einsetzen von $a = 0{,}5795$ in den Ausdruck $\log\log(\nu + a)$ eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten erzielt werden.

Geometrischer Vergleich der Interpolationsformeln.

Es ist zum Schluß vielleicht noch ganz lehrreich, die untersuchten Formeln nach geometrischen Gesichtspunkten zu erörtern. Zunächst

1) C. Andrade, a. a. O.

stellen wir fest, daß alle drei Gleichungen Exponentialformeln sind. Die Größen mit dem Zeiger ∞ bezeichnen Asymptoten der Zähigkeitskurven. Bei der Vogelschen Formel (siehe Abb. 1) kann eine Asymptote parallel zur t-Achse

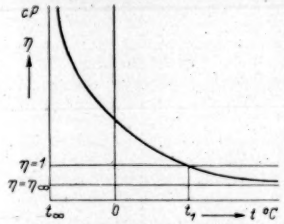

Abb. 1. Gleichung (1) nach Vogel.

und eine parallel zur η-Achse den Versuchswerten angepaßt werden. Das dritte Bestimmungsstück t_1 ist dann durch den Schnittpunkt der Kurve mit der Horizontalen $\eta = 1$ cP gegeben.

Andrade legt eine Asymptote in den absoluten Nullpunkt (Abb. 2); das ist für hochmolekulare Flüssigkeiten wie Mineralöle offenbar nicht zweckmäßig. Die beiden übrigbleibenden Bestimmungsstücke reichen nicht aus, um eine hinreichende Anschmiegung der berechneten Kurven an die Meßwerte zu gewährleisten.

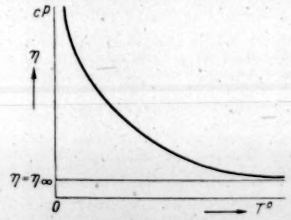

Abb. 2. Gleichung (7) nach Andrade.

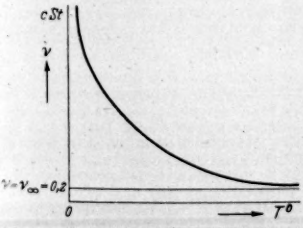

Abb. 3. Gleichung (10) nach Walther.

Walther legt ebenfalls eine Asymptote fest durch die Bestimmung $a = 0{,}8$ bzw. $\nu_\infty = 0{,}2$ cSt (Abb. 3). Diese Werte sind offenbar den Beobachtungswerten in dem beschränkten Gebiet $\nu_{20°} > 50$ cSt so glücklich angepaßt, daß die noch verfügbaren zwei freien Bestimmungsstücke ausreichen, um eine für technische Zwecke genügende Genauigkeit der Wiedergabe zu erzielen. In vielen Fällen wird man sogar die etwas geringere Genauigkeit der zeichnerischen Auswertung mit in Kauf nehmen können, wenn man bei Massenuntersuchungen auf rasche und einfachste Handhabung angewiesen ist.

Vergleich der 1. Differentialquotienten.

Ein ähnliches Bild wie der geometrische Vergleich ergibt die Betrachtung der ersten Differentialquotienten der drei Interpolationsformeln. Diese Differentialquotienten lauten für die Formeln von

$$\text{Vogel:} \qquad \frac{d\eta}{dt} = -k \cdot \frac{\eta}{(t - t_\infty)^2}; \qquad (14)$$

$$\text{Andrade:} \qquad \frac{d\eta}{dT} = -k' \frac{\eta}{T^2} \qquad (15)$$

und

$$\text{Walther:} \qquad \frac{d\nu}{dT} = -k'' \frac{\nu + 0{,}8}{T^{m+1}}. \qquad (16)$$

Man sieht, daß die Differentialquotienten der Formeln von Vogel und Walther zwei freie Bestimmungsstücke enthalten (k, t_∞ bzw. k'', m) und daher in zwei Meßpunkten dem Kurvenverlauf angepaßt werden können, während der Differentialquotient der Formel von Andrade nur ein freies Bestimmungsstück (k') enthält.

Zusammenfassung.

Die Brauchbarkeit verschiedener Interpolationsformeln zur Berechnung der Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit von Schmierölen wird mit zwölf Ölen von genau bekannter Zähigkeit geprüft. Es ergibt sich, daß die theoretisch abgeleitete Formel von Andrade als Interpolationsformel für Schmieröle versagt; bei hohen Ansprüchen an die Genauigkeit ist die Formel von Vogel zu verwenden, doch sind dabei Extrapolationen auf Temperaturen unter 20° C nicht statthaft, wenn ein Fehler von ± 1 Proz. nicht überschritten werden soll. Für technische Zwecke kann wegen ihrer einfachen Berechnung die Formel von Walther empfohlen werden; bei ihrem Gebrauch hängt die erreichbare Genauigkeit von ± 2 Proz. jedoch von der zweckmäßigen Wahl der Meßpunkte ab.

(Eingegangen 8. Januar 1936.)

Zur Definition von physikalischen Größen in Gleichungen, Einheiten, Benennungen, Dimensionen, Größengleichungen usw.

Von Johannes Fischer.

A. Aufgabe.
B. Definitionen.
C. Einheiten, Benennungen, Dimensionen.
D. Größen als benannte Zahlen.
E. Maßunabhängige und maßabhängige Auffassung von Gleichungensätzen. Rechnen mit und ohne Maßsystem. Maßunabhängige Schreibweise oder Auffassung? Die Forderungen der Größengleichungslehre.

A. Aufgabe.

Immer und überall dort, wo es sich um physikalische Größen in Gleichungen handelt, wird mittelbar oder unmittelbar Gebrauch gemacht von den Begriffen der benannten Zahl, der Einheit und der Dimension. Man fühlt sich daher im allgemeinen zu der Annahme berechtigt, daß über diese grundsätzlichen Begriffe die Erörterung abgeschlossen sei und volle Übereinstimmung herrsche. Aber dies scheint nur so zu sein. Je selbstverständlicher — nämlich ein solcher Grundbegriff angewandt wird, um so leichter wird er gewissermaßen abgenutzt, d. h. um so stärker unterliegt er der Gefahr eines unvermerkten Bedeutungswandels, der dann eine fortwährende Quelle von Mißverständnissen, mindestens von Verständigungsschwierigkeiten bildet. Von Zeit zu Zeit kann es daher nützlich sein, die Begriffe zu formulieren und zu ordnen.

Die Erörterung des genannten Fragenkreises ist in neuerer Zeit von der Seite der Elektrizitätslehre durch Wallots[1]) Entdeckung der maßsystemfreien Auffassung der elektromagnetischen Grundgleichungen („Größengleichungen") in Fluß geraten. Bezeichnenderweise erhob sich hier mit dem Wunsche breiterer Beweisführung alsbald die Frage, welchen Sinn das Rechnen mit „Größen" in Gleichungen habe[2]). Sie wurde von Diesselhorst[3]) gestellt und von ihm und von Wallot[4]) von verschiedenen Standpunkten aus untersucht. In diesem Zusammenhang blieb bisher die Abhandlung „Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet" von H. v. Helmholtz (1887) unbeachtet[1]). Dieser Untersuchung kommt aber hier grundsätzliche und umfassende Bedeutung zu, denn sie beschränkt sich nicht etwa auf die Beantwortung der eben erwähnten Frage, sondern es erweisen sich vielmehr die hier von Helmholtz getroffenen (und bis heute unwidersprochen gebliebenen) Begriffsbestimmungen und Formulierungen als tragfähige Grundlage für eine systematische Erörterung des ganzen, in der Überschrift bezeichneten Fragenkreises. Diese hier vorzunehmen, ist unser Ziel.

Dazu sei vorausgeschickt: Bezüglich des Rechnens mit „physikalischen Größen in Gleichungen" wird einerseits in neuerer Zeit ausgesprochen, daß es sich um eine „Symbolik" handle[2]), andererseits findet sich die Meinung, daß dieses Rechnen einen zwar nicht ausdrücklich verabredeten, jedoch allgemein angenommenen, im Grunde logisch nicht völlig korrekten Vorgang enthalte. Durch die Umgrenzung des Sinnes benannter Zahlen in Gleichungen wird versucht werden, diese Ansichten zu entkräften. Dazu gehört, daß der Gebrauch der Begriffe: Einheit, Benennung, Dimension und ihre Beziehungen zueinander untersucht, und etwa vorhandene Verschiedenheiten der Begriffsbildungen voneinander abgehoben werden. Damit ist man aber auch in den Stand gesetzt, die Entstehung von maßunabhängigen Gleichungensätzen („Größengleichungen") und von Maßsystemsgleichungen einander gegenüberzustellen. Das Beispiel der Elektrizitätslehre, in der die Maßsysteme und ihre Theorie an die Namen Gauß und Weber einerseits, Mie andererseits geknüpft sind, dürfte um so nützlicher sein, als gerade auf diesem Gebiet manchmal Fragen der maßunabhängigen Auffassung von solchen des praktischen Maßsystems nicht hinreichend voneinander unterschieden werden.

B. Definitionen.

1. Eine physikalische Größe wird gekennzeichnet durch die Aussage über eine bestimmte Eigenschaft eines physikalischen Zustandes oder Vorganges (begründet durch den Vergleich mit anderen physikalischen Beschaffenheiten), verbunden mit der Aussage über eine

1) J. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr. **43**, 1329, 1922.

2) „Die Kritik des Mathematikers besteht in dem einfachen Einwand, daß man mathematische Operationen . . . nur mit Zahlen, aber niemals mit Elektrizitätsmengen, Kräften, Zeiten, vornehmen könne." H. Diesselhorst, Elektrotechn. Zeitschr. **48**, 426, 1927.

3) H. Diesselhorst a. a. O. u. S. 1836.

4) J. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr. **48**, 430, Pt. 1, 2, 3 u. S. 1882, Pt. 1—7. 1927. — In diesen Abhandlungen werden an zweiter Stelle gewisse Fragen der Definition elektromagnetischer Grundgrößen behandelt, die uns hier nicht berühren.

1) Philosophische Aufsätze, Leipzig 1887. Neu herausgegeben in: H. v. Helmholtz, Schriften zur Erkenntnistheorie, Berlin 1921.

2) Vgl. z. B. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr. **48**, 1882, Pt. 2, letzter Absatz, 1927. „Symbolische Gleichungen kann man nicht ‚verstehen' . . . Wichtig ist nur, daß man aus der Symbolik jederzeit greifbare Schlüsse ziehen kann", ferner das Normblatt 1313 des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen (AEF), 1931, Pt. I.

Menge (begründet durch den Vergleich mit Gleichartigem[1]).

Eine Gleichung stellt im allgemeinen[2]) eine zahlenmäßige Gleichsetzung zweier Mengen[3])[4]) vor.

2. Einheiten einer Zählung nennen wir mit Helmholtz „solche Objekte, die in irgendeiner bestimmten Beziehung gleich sind und gezählt werden. Die Anzahl der Einheiten bezeichnen wir als benannte Zahl, die besondere Art der Einheiten, die sie zusammenfaßt, die Benennung der Zahl".

3. Der Wert der physikalischen Größe in einer Gleichung ist demnach im allgemeinen eine benannte Zahl. Das physikalische Verfahren, wodurch wir die benannte Zahl finden, nennen wir Messung der Größe. Eine Größe messen heißt sie durch eine Zahl darstellen, die angibt, wie viele der zugrunde gelegten Einheiten in der gemessenen Größe enthalten sind. Die vollständige Kennzeichnung des Wertes einer Größe, sofern wir sie durch eine benannte Zahl ausdrücken, besteht daher in der Angabe sowohl der Anzahl der Einheiten wie der Einheit selbst, nach dem Schema: Zahl mal Einheit = benannte Zahl = Wert der (physikalischen) Größe[5]).

1) Die beiden Aussagen der Beschaffenheit und der Menge sind zunächst enger miteinander verknüpft als die beiden Faktoren eines Produktes, d.h., sie können nur mit Hilfe zusätzlicher (willkürlicher) Angaben in einen „qualitativen" und einen „quantitativen" Faktor aufgespalten und diese identifiziert werden. Der qualitative Faktor existiert nicht ohne (willkürliche) Quantitätseigenschaft. Vgl. zu Wallot, Handb. d. Phys. (hrsg. v. Geiger u. Scheel), Bd. II. Berlin 1926, Pt. 26, S. 12, die Ausführungen von Diesselhorst, Elektrotechn. Zeitschr. **48**, 426 r. u. und 427 l. o. 1927.

2) Und im besonderen stets im Gebrauch der Physik.

3) Also nicht etwa nur eine Gleichsetzung reiner Zahlen. — In der Form der Gleichung kann z. B. ausgesprochen werden: die Mitteilung einer gegebenen oder meßbaren Größe (etwa geometrischer oder physikalischer Natur); ein funktionaler Zusammenhang; die Definition einer Größe u. a. m. Das gemeinsame ist offenbar die Gleichsetzung zweier Quantitäten (Mengen), ohne daß darin, wie häufig angenommen wird, etwa definitionsmäßig die einschränkende Bedingung enthalten wäre, daß diese ausschließlich durch reine Zahlen gekennzeichnet sein müßten. Im Begriff der Gleichung steckt nicht der Ausschluß jeder Beschaffenheitsaussage.

4) Unter einer Menge verstehen wir eine Summe von Teilen, die in bezug auf eine bestimmte Eigenschaft oder Beschaffenheit verglichen werden und daher als gleichgeartet addiert werden können; die Summe ist den unter sich gleichgearteten Teilen gleichgeartet und erleidet keine Veränderung bei beliebiger Vertauschung der Teile. — Eine diese Eigenschaft besitzende Größe nennen wir mit Helmholtz „additiv".

5) Indem wir festsetzen, daß in der Gleichung nicht die physikalische „Größe" selbst, sondern ihr Wert auftrete, daß mit anderen Worten physikalische Größen in Gleichungen durch benannte Zahlen verkörpert werden, vermeiden wir die „symbolische" Auffassung der Gleichung.

C. Einheiten, Benennungen, Dimensionen.

1. Einheiten.

Entsprechend der Tatsache, daß für eine physikalische Größe häufig verschiedene Arten der Messung möglich sind, kann es für sie auch verschiedene Arten von Einheiten geben. Wir müssen grundsätzlich zwei Auffassungen scharf voneinander trennen:

a) Eine Reihe von Gleichungen sei gegeben, aus denen sich mit gewissen Grundannahmen die Größen der Reihe nach ableiten lassen (Definitionsgleichungen). Ähnlich wie man jeder neu definierten Größe einen besonderen Namen geben kann, denken wir zunächst einer jeden Größe ein Normalmaß oder Eichstück, dessen Größe wir willkürlich wählen, zugeordnet (ohne Rücksicht auf die Festsetzung von Einheiten anderer Größen). Es soll also eine Entfernung nur durch Vergleich mit einem Längennormal, ein Widerstand nur durch Vergleich mit einem Normalwiderstand gemessen werden usw.[1]). Die so entstandenen Einheiten nennen wir Vergleichseinheiten oder primitive Einheiten, denn es ist ihr wesentliches Merkmal, daß sie entstanden sind ohne irgendwelche Beziehungen zu den Einheiten anderer physikalischer Größen; diese ergeben sich erst aus den Gleichungen selbst. Der Zahlenwert, den man der primitiven Einheit einer Größe beilegt, ist willkürlich; primitive Einheiten sind beliebig angenommene Beträge der betreffenden Größen.

b) Wir sprechen von einer abgeleiteten Einheit ganz allgemein dann, wenn in der Einheit der Zusammenhang mit anderen Einheiten zum Ausdruck kommt.

In erster Linie sind daher (unmittelbare) abgeleitete Einheiten jene, die aus Potenzenprodukten anderer, einfacher Einheiten (Grundeinheiten) gebildet sind. (Beispiel: Ein Widerstandsnormal als körperliches Modell ist eine primitive Einheit, 1 Ohm = 1 Volt/1 Amp ist eine abgeleitete Einheit des Widerstandes.)

In zweiter Linie sprechen wir von einer mittelbaren abgeleiteten Einheit, wenn in einer solchen zum Ausdruck kommt, daß für

1) Daß in vielen Fällen derartige Eichstücke nicht als Modelle verwirklicht werden können, ändert an der Definition nichts. Ebenso schließen wir die Verfahren, nach denen die primitive Einheit zur Messung angewandt werden kann, von der Definition aus (wir bezeichnen z. B. eine verkörperte Widerstandseinheit als „primitive Einheit", unbekümmert darum, auf welche Weise mit ihr elektrische Widerstände gemessen werden können). — Die meßtechnischen Fragen der Realisierbarkeit, Reproduzierbarkeit usw. spielen für die Definition keine Rolle.

die Messung der Größe Gebrauch gemacht wird von einer in ihrer Definition nicht unmittelbar enthaltenen, nach Zahl und Einheit bekannten Wertbestimmung einer physikalischen Eigenschaft. (Beispiel: Das Normalmeter ist eine primitive Einheit zur Messung einer Strecke, die Lichtsekunde eine mittelbare abgeleitete; im Vergleich zu der abgeleiteten Druckeinheit 1 kg/cm² des technischen Maßsystems ist 1 mm Quecksilbersäule eine mittelbare abgeleitete Einheit.)

Ebenso wie in einem durch einen Gleichungensatz beschriebenen Gebiete der Physik die einzelnen Größen durch Definitionsgleichungen aus Grundgrößen hervorgehen, ergeben sich die unmittelbaren abgeleiteten Einheiten aus angenommenen Grundeinheiten. Für die Wahl und die Festsetzung der voneinander unabhängigen Grundgrößen und die Bestimmung der entsprechenden, unabhängigen Grundeinheiten können die verschiedensten Gesichtspunkte maßgebend sein. Aus der Willkür der Festsetzung der Grundeinheiten folgt, daß es für dieselbe Größe Einheiten verschiedener Art geben kann (z. B. $1\ g \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}$ oder $1\ g^* \cdot cm$ als Arbeitseinheit, je nach Wahl der Grundeinheiten Masse = g, cm, sec oder Kraft = g*, cm, sec). Durch die Wahl der Grundgrößen wird lediglich die Art der abgeleiteten Einheit ausgesprochen; die Zahlenwerte der Grundeinheiten können hierbei noch offengelassen sein. (Arbeits„einheit" $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ oder $K \cdot L$, wobei durch die Bezeichnung M, L, T und K zum Ausdruck gebracht ist, daß der Betrag der Grundeinheiten ohne Wichtigkeit ist.) Wir kommen damit zum Helmholtzschen Begriff der Benennung (Abschnitt C 2).

Die Beziehungen verschiedener Einheiten derselben Größe zueinander untersuchen wir gesondert (Abschnitt C 5c). In Abschnitt D kommen wir auf Möglichkeit und Sinn abgeleiteter Einheiten zurück.

2. Benennungen.

Die besondere Art der Einheiten, die diese zusammenfaßt, bezeichnen wir mit Helmholtz als Benennung.

Demnach ist unter der Benennung nichts anderes zu verstehen, als die Beziehung der Einheit zu den gegebenen (gewählten) Grundeinheiten, deren Betrag (Zahlenwert) offengelassen ist.

(Beispiel: Bezieht man die Einheit der Arbeit auf die Einheiten der Masse, Länge und Zeit, so ist die Einheit $1\ g \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}$, die Benennung $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ [unter M, L, T, wie in 1., Grundeinheiten von offengelassenen Betrag verstanden].)

Ferner: Betrachtet man nun, unabhängig davon, die Buchstaben der Benennungsformeln als Zahlen, so gibt die Benennungsformel einer Größe an, wieviel mal so groß die abgeleitete Einheit wird, wenn man die Zahlenwerte der Grundeinheiten ändert (Fouriers Dimensionsbegriff, s. u.).

(Macht man die Masseneinheit M-mal, die Längeneinheit L-mal, die Zeiteinheit T-mal so groß, so wird die Arbeitseinheit $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$-mal so groß.)

Die Benennung einer Größe ist eindeutig nur in Beziehung zu Grundeinheiten gegebener Art, es ist ein grundsätzlicher Irrtum, in den Benennungen, wie auch in den abgeleiteten Einheiten, einen tieferen Sinn zu suchen. Verschiedene Benennungen der gleichen Größe werden ebenso aufeinander zurückgeführt, wie die entsprechenden Grundeinheiten. Die Frage nach der wahren Benennung ist ebenso müßig, wie die Frage nach dem wahren Namen einer Größe [Planck[1]].

3. Dimensionen.

Dem Begriff „Dimension" werden die folgenden, verschiedenen Bedeutungen beigelegt:

a) Die in den Dimensionsformeln Fouriers[2]) auftretenden Buchstaben bedeuten nicht die Namen von Einheiten, sondern Zahlen, die angeben, wieviel mal so groß bei einem Grundeinheitenwechsel die neuen Einheiten sind wie die alten[3]). (Beispiel: Wenn man die Einheit der Kraft so definiert, daß die Gleichung $K = m\frac{d^2l}{dt^2}$ besteht, so gilt: Werden die Einheiten der Masse, Länge und Zeit abgeändert, so daß sich die entsprechenden Zahlenwerte mit μ, λ, τ multiplizieren, so multipliziert sich der Zahlenwert der Kraft mit $\mu\lambda\tau^{-2}$, daher heißt der Ausdruck $M \cdot L \cdot T^{-2}$ in diesem System die Dimension der Kraft.)

b) Ein anderer Sprachgebrauch sagt: Die Kraft hat bezüglich der Masse und der Länge die Dimension $+1$, bezüglich der Zeit -2. Hier wird also der Exponent als Dimension bezeichnet[4]).

c) Häufig wird zwischen Einheit und Dimension überhaupt nicht unterschieden, also z. B. $kg \cdot m \cdot sec^{-2}$ als Dimension der Kraft bezeichnet.

1) Planck sagt: wahre Dimension.

2) M. Fourier, Theorie der Wärme (deutsche Ausgabe von W. Weinstein, Berlin 1884), Art. 157 bis 162.

3) Hierauf haben besonders hingewiesen: F. Emde, Elektrotechn. Zeitschr. **44**, 175, 1933; Handwörterbuch d. Naturwiss. **7**, 1016, 1932; J. Wallot, Handb. d. Phys. **2**, 18, 1926.

4) So bei Wallot, Handb., a. a. O.; F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys.

Dieser Wortgebrauch ist überflüssig und daher abzulehnen.

d) Der heutige Sprachgebrauch erlaubt die Aussage: Die Kraft hat die Dimension einer Masse, multipliziert mit einer Länge und dividiert durch das Quadrat einer Zeit. Unterstellen wir, daß hier für die genannten drei Größen primitive Einheiten von offengelassenem Zahlenwert gemeint sind, so deckt sich diese Auffassung mit unserem Begriff der Benennung.

Dafür, den Ausdruck „Benennung" an die Stelle von „Dimension" treten zu lassen, sprechen mehrere Gründe: die verschiedenen Bedeutungen des Wortes „Dimension" werden heute nebeneinander gebraucht, ohne daß eine derselben bisher einhellige Ablehnung erfahren hätte; diese schwankende Bedeutung ist aber der Verständigung abträglich. Die heute verbreitetste Auffassung (d) deckt sich mit dem Begriff der Benennung. Die Definition der Benennung ist einfach und liegt im Zuge der Helmholtzschen Definitionen, steht daher auch in einem klaren Verhältnis zu dem von Helmholtz geprägten, gebräuchlichen Einheitsbegriff.

4. „Allgemeine Einheitengleichung".

Hierunter versteht Wallot eine formal besonders folgerichtige Rechnungsweise in den Beziehungen von Einheiten zueinander. Aus jeder Gleichung, die eine Gesetzmäßigkeit zwischen physikalischen Größen ausdrückt, läßt sich eine entsprechende Gleichung zwischen den Einheiten dieser Größen ableiten, indem jeder in der Gleichung dargestellten Größe offenbar eine Vergleichseinheit von zunächst unbestimmtem Betrag zugeordnet werden kann und indem man zur Feststellung der Beziehungen dieser „allgemeine" genannten Einheiten in der Gleichung überall und folgerichtig das Schema „Zahl mal Einheit" einsetzt. Die „Einheitengleichung" stimmt dann in ihrer Form bis auf einen Zahlenfaktor mit der ihr entsprechenden Gleichung zwischen den physikalischen Größen überein. (Beispiel: Aus der Gleichung zwischen benannten Zahlen $W = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{t^2}$ folgt nach dieser Vorschrift, wenn die Einheiten von offengelassenem Zahlenwert durch [. . .] symbolisiert werden:

$$[W] = \zeta \cdot [M][L]^2[T]^{-2},$$

als „allgemeine Einheitengleichung". „Jede Einheitengleichung enthält einen Umrechnungsfaktor ζ, d. h. eine reine Zahl, deren Wert von der besonderen Wahl der Einheiten, die in unser Belieben gestellt ist, und außerdem von etwaigen in der zugehörigen allgemeinen Gleichung vorkommenden Zahlenfaktoren abhängt"[1]). „ζ hört auf, willkürlich zu sein, sobald wir uns für eine bestimmte besondere Einheit entschlossen haben"[2]).

Die „allgemeine Einheitengleichung" dient also einerseits der Herstellung der Beziehung einer gesuchten Einheit zu gewählten Grundeinheiten und steht hierin dem Benennungsbegriff (dem Dimensionsbegriff d) nahe, andererseits dient sie der Feststellung der Beziehung vollständig gegebener Einheiten zueinander durch Berechnung des Faktors ζ aus einer Gleichung zwischen gegebenen, benannten Zahlen.

5. Bemerkungen.

a) Umfang des Einheitsbegriffs.

Zweifellos ist der Begriff der abgeleiteten Einheit weiter als der der primitiven Einheit, am weitesten der Begriff der mittelbaren abgeleiteten Einheit. Gelegentlich wird die Auffassung vertreten, ausschließlich die primitive Einheit (als willkürlich herausgegriffene Größe derselben Art) könne dem ursprünglichen Begriff nach als Einheit bezeichnet werden. Es ist durchaus logisch möglich, diese Forderung zu erheben; jedoch kann nur aus der historischen Entwicklung entschieden werden, ob diese eingeschränkte Auffassung allgemeine Anerkennung besitzt. Dies ist offenbar nicht der Fall: Auch die abgeleiteten Einheiten, selbst die mittelbaren abgeleiteten Einheiten werden von jeher in Physik und Technik als „Einheiten" bezeichnet und verstanden. Die historische Entwicklung gibt dem Standpunkt recht, der den Begriff der Einheit nicht ausschließlich einem Prototyp der Größe vorbehält, sondern der vielmehr in Übereinstimmung steht mit der viel weiteren Begriffsbestimmung von Helmholtz, nach welcher als Einheiten zu verstehen sind „solche Objekte, die in einer bestimmten Beziehung gleich sind und gezählt werden" (vgl. Abschnitt B 2) – und dazu gehören nicht nur die primitiven, sondern auch die abgeleiteten Einheiten, einschließlich der mittelbaren abgeleiteten.

b) „Einheiten von offengelassenem Zahlenwert".

Dieser Begriff wurde im bisherigen mehrfach ohne Schwierigkeiten gebraucht. Wie steht es mit seiner Definition? Es war Voraussetzung, daß jede Größe als benannte Zahl = Zahl mal Einheit dargestellt, und daher jeder Größe rein

1) J. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr., 1922, Pt. 5, 6.
2) J. Wallot, Handb., Pt. 27.

begrifflich eine Vergleichseinheit (primitive Einheit) zugeordnet werden könne, unerachtet der Realisierbarkeit und anderer Rücksichten. Für einige Zwecke erwies es sich dann nicht als notwendig, der Vergleichseinheit jeder Größe einen ganz bestimmten, gegenständlichen Betrag zu geben, vielmehr konnten bestimmte Beziehungen in allgemeiner Form, in der nur die Art, aber nicht der Betrag der Einheit gegeben war, festgestellt werden. Dies entspricht ganz dem mathematischen Verfahren, eine unbekannte Größe zunächst als bekannt anzunehmen, sie etwa x zu schreiben und die Beziehungen dieses x zu anderen Größen festzustellen. Die physikalische Messung erfordert natürlich eine Einheit von bestimmt gegebenem Zahlenwert[1]).

c) Beziehungen von Einheiten derselben Größe zueinander.

Zur Klarstellung der Beziehungen, die zwischen den Einheiten derselben physikalischen Größe bestehen, untersuchen wir den Quotienten zweier Einheiten der gleichen Größe. Hier herrschen zwei Auffassungen:

α) Wenn der Zahlenwert, den man der primitiven Einheit einer Größe beilegt, willkürlich ist, so läßt sich daraus folgern, daß primitive Einheiten der gleichen Größe sich nur durch Zahlenfaktoren voneinander unterscheiden. Dasselbe läßt sich offenbar auch aussagen für verschiedene (abgeleitete) Einheiten der gleichen Art, die derselben Größe zugehören. (Beispiel: 100 cm ≡ 1 m, 1000 m · g* ≡ 1 m · kg*). Ja selbst der Quotient zweier Einheiten verschiedener Art, die der gleichen Größe zugehören, läßt sich als Zahlenfaktor beurteilen, indem man nämlich die verschiedene Art der Messung, die sich in jeder der beiden Einheiten ausspricht, als formal unwesentlich außer Acht läßt und hervorhebt, daß Zähler und Nenner des Quotienten aus Größen der gleichen physikalischen Art gebildet sind, die sich lediglich durch ihre Beträge unterscheiden. Dieser Gesichtspunkt legt also die Auffassung nahe, daß der Quotient beliebiger Einheiten derselben Größe stets eine reine Zahl sei. (Hiernach wäre z. B. der Quotient kg/cm²:mm Quecksilbersäule eine reine Zahl, ebenso wären aber auch Äquivalente, z. B. $4{,}184 \frac{\text{Joule}}{\text{cal}}$, als reine Zahlen zu bewerten.) Dies ist der Standpunkt der Größengleichungslehre. („Nach der Festsetzung: Größe = Zahl mal Einheit dürfen sich die verschiedenen Einheiten, die man einer Größe zuordnen kann, nur durch eine reine Zahl voneinander unterscheiden"[1]).) Auf diesen Satz gestützt, führt die Größengleichungslehre den für sie ausschlaggebend wichtigen Beweis, daß in den elektromagnetischen Grundgleichungen dann, wenn sie in der Form eines der absoluten Maßsysteme geschrieben sind, mit Notwendigkeit die Formelzeichen reine Zahlen, mit Sicherheit keine benannten bedeuten können[2]).

Die Aussage, daß die Einheiten der gleichen Größe sich nur durch reine Zahlen voneinander unterscheiden können, legt die Frage nahe, welches denn, abgesehen von einem Zahlenfaktor, die der betrachteten Größe wirklich zukommende „wahre" Einheit sei[3]). Es ist also offenbar dieser Standpunkt nicht der einzig mögliche.

1) Aus diesem Grunde wäre es auch nicht unberechtigt zu fordern, daß in diesem Zusammenhang statt des Wortes „Einheit" ein anderes angewendet werden müsse. Sieht man nämlich als definierend für den Begriff „Einheit" an, daß durch die Einheit die Größe physikalisch gemessen, d. h. ihr Wert als Zahl mal Einheit angegeben werden könne (Abschnitt B 3), so besitzt eine „Einheit von unbestimmtem Zahlenwert" offenbar das Merkmal des Begriffes „Einheit" nicht mehr, daß mit ihr die Größe gemessen werden kann. (Die festgesetzte Einheit 1 km ist eine Vergleichseinheit für Entfernungen, [L] ist ein Symbol.) Diese Überlegung betrifft somit auch die „allgemeinen Einheitengleichungen" (C 4). — Diesem Einwand gegenüber liegen der Begriff der „Einheit von unbestimmtem Betrag" und seine Voraussetzungen so klar und einfach, daß Mißverständnisse kaum zu befürchten sind.

1) J. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr. 1922, Pt. 22, 23. — „Aus der grundlegenden Gleichung: Größe = Zahlenwert mal Einheit folgt mit Notwendigkeit, daß sich die verschiedenen Einheiten derselben Größe nur um Zahlenfaktoren unterscheiden": J. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr. **51**, 623, 1930. Ebenso das AEF-Normblatt 1313, S. 3, Abschnitt C, 1931, wo ausgeführt wird, daß die Anerkennung dieses Satzes es notwendig mit sich bringt, daß die absoluten Maßsysteme der Elektrizitätslehre „den Grundsätzen widersprechen, auf denen das Rechnen mit Größengleichungen beruht".

2) Aus dem angeführten Satz wird gefolgert: Die absolute elektrostatische und die absolute elektromagnetische Einheit derselben Größe, z. B. der Größe „elektrische Ladung", unterscheiden sich nicht durch eine reine Zahl, sondern durch eine benannte, nämlich um den Wert einer Geschwindigkeit. „Will man also die beiden absoluten Systeme nebeneinander gebrauchen, so muß man entweder die Geschwindigkeit zu einer dimensionslosen Größe machen ..., oder meine zweite Forderung ablehnen." (Diese ist: Jedes Formelzeichen ist als „symbolisches Produkt: Zahlenwert mal Einheit" zu verstehen: J. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr. 1922, Pt. 5, 6, 21. — AEF-Normblatt 1313, Pt. I, auch in Elektrotechn. Zeitschr. **51**, 586, 1930.) „Der erste Ausweg ist von niemand ernstlich erwogen worden, man hat allgemein den zweiten gewählt, d. h. sich dafür entschieden, unter den Formelzeichen die Zahlenwerte zu verstehen ..."

3) Ob z. B. 1 dyn oder 1 Kraftgramm jene Krafteinheit sei, von der alle denkbaren anderen Krafteinheiten sich lediglich durch einen reinen Zahlenfaktor unterscheiden können. Noch deutlicher wird dies am Beispiel der Energie.

β) Gegenüber der Auffassung, daß die Einheiten der gleichen Größe sich nur durch reine Zahlen unterscheiden können, läßt sich anführen, daß formal in der Rechnung, die doch schließlich der Zweck des Umgangs mit benannten Zahlen ist, der Quotient zweier Einheiten derselben Größe stets als benannte Zahl, d. h. nach dem Schema: Zahl mal Einheit, geführt werden muß. Dies gilt nicht nur für mittelbare und unmittelbare abgeleitete, sondern ebenso für primitive Einheiten (in diesem Sinn ist $4{,}184 \frac{\text{Joule}}{\text{cal}}$ eine benannte Zahl, aber auch die Angabe $100 \frac{\text{cm}}{\text{m}}$ erfüllt das Schema: „Zahl mal Einheit"). Ein und dieselbe physikalische Größe kann durch ganz verschiedene Produkte „Zahl mal Einheit" dargestellt werden; sowie aber die verschiedenen Einheiten auch verschiedene Namen (Bezeichnungen) haben, was für ihre vollständige Identifikation notwendig ist, rechnet man auch mit den Beziehungen zwischen den Einheiten als mit benannten Zahlen ($l = 3{,}6\ \text{m} = 360\ \text{cm}$; $3{,}6\ \text{m} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}} = 360\ \text{cm}$).

Ob man den Quotienten zweier Einheiten der gleichen Größe deswegen als reine Zahl bewertet, weil Zähler und Nenner des Quotienten, physikalisch gesehen, Größen gleicher Art sind, oder ob man ihn deswegen als benannte Zahl auffaßt, weil er in der Rechnung notwendig eine Benennung tragen muß, ist Definitions- und Auffassungssache. Solange nicht eine der beiden Möglichkeiten aus zwingenden logischen Gründen ausscheidet, sollte man keine von beiden zur Voraussetzung eines grundlegenden Beweises machen[1]).

1) Gewöhnlich sträubt sich das Gefühl beim ersten Standpunkt (α) dagegen, auch den Quotienten von Einheiten verschiedener Art als unbenannte Zahl anzuerkennen, beim zweiten Standpunkt (β) dagegen, den Quotienten von Einheiten gleicher Art ausführlich als benannte Zahl aufzufassen und anzuschreiben. — Daß es sich hierbei lediglich um zwei formal verschiedene Ausdrucksweisen derselben Tatsache handelt, nicht um zwei zueinander gegensätzliche logische Standpunkte, deren einer als Grundlage eines Ausschlußbeweises dienen könnte, sei hier nochmals betont und am Beispiel der üblichen Schreibweisen der Äquivalente erläutert. Aus der Form (*a*) 1 Joule = 0,239 cal folgt (*b*) $1 = 0{,}239 \frac{\text{cal}}{\text{Joule}}$. Hieraus pflegt gefolgert zu werden, daß $0{,}239 \frac{\text{cal}}{\text{Joule}}$ eine reine Zahl sein müsse. Jede andere unbenannte Zahl aber kann als Ziffer geschrieben werden, z. B. 0,239. Ferner: die rechte Seite von (*b*) hat die Form „Zahl mal Einheit", und so wird mit ihr gerechnet, ganz unabhängig davon, was sie „in Wirklichkeit" ist. Die andere Schreibweise (*c*) $A = 0{,}239 \frac{\text{cal}}{\text{Joule}}$ bringt zum Ausdruck: mit dem Einheitenverhältnis ist zu rechnen, wie mit jeder benannten Zahl. — Ob man nur mit (*a*) umrechnet, oder mit (*c*) das Einheitenverhältnis als Formelzeichen führt, hängt natürlich immer im einzelnen vom Zweck der Darstellung ab.

1) Helmholtz a. a. O., Abschnitt „Teilbarkeit der Größen und Einheiten".

2) Ähnlich, aber nicht gleich dieser Helmholtzschen Klassifizierung ist die Unterscheidung zwischen intensiven und extensiven Größen oder die von Wallot (Handb. a. a. O., S. 2, 3) vorgeschlagene Trennung nach Größen, die „aus Definitionen folgen", und „empirische Faktoren". Die Helmholtzsche Unterscheidung ist aber wohl die einfachste und klarste.

D. Größen als benannte Zahlen.

Um die Beziehungen zwischen physikalischen Größen durch Gleichungen sinnvoll darstellen zu können, ist es nicht nötig, die Einheiten nach Zahlenwert und Art und Zusammenhang mit anderen Einheiten zuvor festzulegen; auch ohne daß man Kenntnis hat von der Aufteilung jeder benannten Zahl in Einheit und Zahlenwert, lassen sich physikalische Gesetzmäßigkeiten in Gleichungen ausdrücken, deren Formelzeichen als benannte Zahlen zu werten sind. (Zahlentheoretisch: Der Begriff der Größe kann ohne die Zerlegung in Einheiten gewonnen werden[1]). Physikalisch: Die Naturgesetze sind unabhängig von der Einheitenbestimmung und müssen daher auch unabhängig davon ausgedrückt werden können.)

Man unterscheidet formal zwei Arten von Größen: bei der einen Art kann man die Größe mit anderen, gleichgearteten, zu einer Summe vereinigen, die den unter sich gleichgearteten und untereinander vertauschbaren Einzelteilen gleichgeartet ist. Physikalische Größen, welche additive Verbindungen zulassen, können deshalb stets als benannte Zahlen ausgedrückt werden; wir nennen sie „additive Größen" (Länge, Zeit, die meisten Zustandsgrößen sind additiv). Die andere Art von Größen tritt auf, so oft sich ein naturgesetzlicher Zusammenhang zwischen additiven Größen bei Vorgängen zeigt, die durch die Besonderheiten eines bestimmten Stoffes oder Körpers beeinflußt werden; in ihnen kommen allgemein Wertbestimmungen physikalischer Eigenschaften zum Ausdruck, wir nennen sie physikalische Konstanten oder Koeffizienten (z. B. die Permeabilität, die spezifische Wärme usw.)[1]). Es ist von Natur aus nicht notwendig, daß solche als benannte Zahlen ausgedrückt werden. Will man aber in einem Satz von Gleichungen willkürliche Festsetzungen von vornherein vermeiden, so wird man auch (bis zu näherer Festsetzung) die Koeffizienten als benannte Zahlen auffassen[2]).

Wir fragen, unter welchen Bedingungen benannte Zahlen in Gleichungen auftreten können,

oder damit gleichbedeutend, unter welchen Umständen eine Rechenoperation mit benannten Zahlen sinnvoll ist. Dies ist stets und nur dann der Fall, wenn die Anwendung der Rechenoperation auf die betreffenden Einheiten mögliche physikalische Verknüpfungen dieser ergibt. Die sinnvollen Rechenoperationen beschränken sich daher auf die Produktbildung (Potenzenprodukte, Quotienten) benannter Zahlen. Demnach hat die Multiplikation zweier oder mehrerer benannter Zahlen nur in bestimmten Fällen einen Sinn, dann nämlich, wenn besondere physikalische Verknüpfungen unter den betreffenden Einheiten möglich sind, die den drei Grundgesetzen der Multiplikation unterworfen sind[1]). Alle solche multiplikativ definierten Einheiten sind ungleichartig denen, aus denen sie hervorgegangen sind und bekommen einen Sinn nur durch die Kenntnis besonderer physikalischer oder geometrischer Gesetze.

Aus dieser Überlegung läßt sich auch der bekannte „Satz von den dimensionslosen Potenzenprodukten" entwickeln.

E. Maßunabhängige und maßabhängige (einheitenfreie und einheitenbezogene) Auffassung von Gleichungensätzen. Rechnen mit und ohne Maßsystem. Maßunabhängige Schreibweise oder Auffassung?

Gegeben seien die zur vollständigen Beschreibung eines Gebietes der Physik hinreichenden Gleichungen in einer Schreibweise (Form), in der willkürliche Festsetzungen, Zusätze und Unterlassungen nicht enthalten sind, in denen daher alle Formelzeichen (auch alle Koeffizienten) als benannte Zahlen betrachtet werden, die physikalische Größen darstellen[2]). Eine diese Bedingungen erfüllende Form kann immer gefunden werden. Dann sind in dem Gleichungensatz γ Größen mehr enthalten, als Gleichungen vorhanden sind. Daher sind γ Größen voneinander unabhängig. γ hat den Wert 1 in der Geometrie, 2 in der Kinematik, 3 in der Mechanik, 4 in der Wärmelehre und ebenso 4 in der Elektrizitätslehre, wie schon Maxwell ausgesprochen hat[3])[4]).

Nun bestehen zwei Möglichkeiten[1]):

1. Man wählt nach Zweckmäßigkeitsgründen, welche γ voneinander unabhängigen Größen man als „Grundgrößen" auffassen will, und legt die Einheiten der Grundgrößen als Grundeinheiten (primitive Einheiten) unabhängig fest. Dann lassen sich die Einheiten aller anderen Größen aus den Gleichungen ebenso der Reihe nach herleiten wie die Größen selbst. Diese Definitionsgleichungen zwingen jedoch in keiner Weise zu irgendeinem Zahlenfaktor der jeweils definierten Einheit; die Einheiten werden dadurch „aufeinander abgestimmt", daß man in ihren Beziehungen zueinander nur möglichst bequeme Zahlenfaktoren vorkommen läßt (z. B. Eins[2])). Auf diese Weise ist ein „Maßsystem" entstanden, die darauf bezogenen Gleichungen sind Maßsystemsgleichungen, allgemeiner: einheitenbezogene Gleichungen; die Einheiten sind auf die Gleichungen und aufeinander abgestimmt. — Wie hier geschildert, wird bei den Maßsystemen der Mechanik und der Wärmelehre, in der Elektrizitätslehre beim Mie'schen Maßsystem verfahren; bei den sog. „absoluten" Maßsystemen der Elektrizitätslehre treten noch gewisse Festsetzungen hinzu[3]), die die Form der Gleichungen beeinflussen.

schreibung der elektromagnetischen Erscheinungen erfordert mit Sicherheit einen Grundbegriff mehr als die der mechanischen Erscheinungen, nur durch diese können jene nicht vollständig beschrieben werden. Die Maßsysteme der Elektrizitätslehre, welche sämtliche elektromagnetischen Einheiten auf die mechanischen zurückführen, entsprechen jener Entwicklungsstufe der theoretischen Physik, in der diese Tatsache noch nicht klar erkannt war.

1) Und zwar, wie hervorgehoben sei, nach Festlegung der Schreibweise (Form).

2) Das bedeutet: Wo zwischen zwei Größen Proportionalität festgestellt ist und der Proportionalitätsfaktor auf keine Weise physikalisch beeinflußt werden kann, setzt man ihn Eins, wenn nicht besondere Rücksichten vorliegen.

3) Entwickelt man die elektromagnetischen Gleichungen in der oben geforderten voraussetzungslosen Weise, so treten stets an zwei Stellen Koeffizienten auf, die nur mittelbar durch bestimmte Annahmen festgelegt werden können und in bestimmter Beziehung zur Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume stehen. (Diese Koeffizienten sind bei Heaviside ε_0 und μ_0 in $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu_0 \cdot \mu \mathfrak{H}$, bei Lorentz k und h in $K_e = k \cdot \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}$, $K_m = h \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}$.)

a) Die „absoluten" Maßsysteme (Gauß und Weber) setzen (mindestens) einen dieser Koeffizienten willkürlich fest, z. B. als reine Zahl. Dadurch verringert sich die Anzahl der voneinander unabhängigen Grundgrößen und Grundeinheiten von vier auf drei. Wählt man als Energieeinheit die „absolute" mechanische, so können die Einheiten aller elektrischen und magnetischen Größen als Potenzenprodukte der drei „absoluten" mechanischen Grundeinheiten angegeben werden.

(Fortsetzung der Anmerkung auf S. 127.)

1) Helmholtz a. a. O.

2) Zur Verdeutlichung mag man etwa bei jedem Formelzeichen an eine benannte Zahl vom Schema Zahl mal Vergleichseinheit denken. Reine Zahlen als Faktoren der Formelzeichen treten bei einer solchen Schreibweise daher höchstens an besonders zu rechtfertigenden Stellen auf (z. B. Punktsymmetrie im Raum, Energieansätze als Integrationsergebnisse u. dgl.).

3) J. C. Maxwell, Elektrizität und Magnetismus (deutsche Ausgabe von W. Weinstein, Berlin 1883), Art. 623.

4) Auch in der mikroskopischen Elektrodynamik, der Elektronentheorie, bleibt $\gamma = 4$. — Die Be-

Läßt man den Zahlenwert der gegebenen Grundeinheiten unbestimmt, so ergeben sich nicht die abgeleiteten Einheiten, sondern die Benennungen der Größen „in bezug auf das gewählte Maßsystem" (vgl. Abschn. C 1, 2).

2. Läßt man dagegen die Frage offen, welches die γ voneinander unabhängigen Grundeinheiten sein sollen, so hat man den Gleichungensatz ohne jede Rücksicht auf Einheitenfragen geschrieben, hat also offenbar einen Satz von maßunabhängigen (maßsystemfreien, einheitenfreien, „unbedingten") Gleichungen. – Solche Gleichungen sind sinnvoll, da physikalische Größen in Gleichungen durch benannte Zahlen verkörpert werden. In den Beziehungen der Einheiten zueinander, die sich aus den Gleichungen ableiten lassen, stecken natürlich eine Anzahl von (oft unbequemen) Faktoren. Dies kommt beim Zahlenrechnen zum Ausdruck. Da maßunabhängige Gleichungen in ihrer Form keine Beziehungen zu irgendeiner Einheitenbestimmung voraussetzen, sind sie unempfindlich (invariant) gegen Einheitenwechsel.

Rechnen mit und ohne Maßsystem. Der Vorteil der maßunabhängigen Auffassung von Gleichungen für theoretische Darstellungen liegt auf der Hand. Der Tatsache, daß die Naturgesetze von den Einheiten unabhängig sind, sollten theoretische Darstellungen durch eine maßunabhängige „unbedingte" Form gerecht werden. Beim Zahlenrechnen muß man für jedes Formelzeichen das vollständige Produkt: Zahl mal Einheit anschreiben; aus einer k verschiedene Größen enthaltenden maßunabhängigen Gleichung errechnet sich aus den $k-1$ Größen die letzte nach Zahl und Einheit, die Einheit ergibt sich aus der Gleichung. Beim Zahlenrechnen mit einheitenbezogenen Gleichungen sind dagegen sämtliche Einheiten schon vorher aus dem Gleichungensatz entwickelt und aufeinander abgestimmt, also vollständig gegeben; beiderseits des Gleichheitszeichens dazu geschrieben bedeuten die Einheiten nur noch eine Identität, man kann sie daher beim Zahlenrechnen unbesorgt weglassen und nur die Zahlenwerte einsetzen, d. h. jedes Formelzeichen als unbenannte Zahl werten. Beim Rechnen in einheitenfreien Gleichungen geschieht genau der gleiche Vorgang während der Rechnung, der bei einheitenbezogenen Gleichungen vorher vorgenommen wurde: die Entwicklung der Einheit. Wünscht man das Ergebnis der mit einer maßunabhängigen Gleichung durchgeführten Rechnung nicht in der sich ergebenden, sondern einer ganz bestimmten Einheit ausgedrückt zu sehen, so müssen Beziehungen zwischen diesen Einheiten als Umrechnungsfaktoren (benannte Zahlen!) bekannt sein. Zu solchen gehören: die Unterteilung von Einheiten (z. B. $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{sec}$), die Äquivalente (z. B. $1\,\mathrm{cal} = 4{,}186 \cdot 10^7\,\mathrm{Erg}$) und die allgemeinen physikalischen Konstanten als benannte Zahlen (z. B. elektrische Konstante ε_0, Faradaykonstante, Strahlungskonstante, Wirkungsquantum)[1]. Natürlich kann man auch, anstatt

b) Das Miesche Maßsystem kann durch folgende Auffassung gekennzeichnet werden: Die beiden Koeffizienten sind universelle Konstante, deren Werte durch Messungen bestimmt und als benannte Zahlen mit Hilfe der vier Grundeinheiten ausgedrückt werden können. Diese vier voneinander unabhängigen Grundeinheiten sind als primitive Einheiten vereinbart. Ebenso, wie in der Wärmelehre, ist die Energieeinheit nicht mit der mechanischen identisch (die Äquivalente sind durch Messung zu bestimmen). Aus diesem Grunde können zwei der vier Grundeinheiten voneinander unabhängige Einheiten elektromagnetischer Größen sein, die beiden anderen betreffen Entfernung und Zeit. Das praktische Miesche Maßsystem benutzt die international vereinbarten (gesetzlichen) Einheiten für Strom (Ladung), Spannung, Länge und Zeit. Durch Energieäquivalent A, elektrische Konstante ε_0 und magnetische Konstante μ_0 als benannte Zahlen, dazu den Ausdruck der elektromagnetischen Energieeinheit in Bezug zu den Grundeinheiten ist jedes Mie'sche Maßsystem vollständig bestimmt. Beispiel: Für die elektrische Konstante ε_0 ist der derzeit beste Meßwert im praktischen Mieschen System

$$\varepsilon_0 = 0{,}8859 \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{Amp \cdot sec}}{\mathrm{Volt \cdot cm}}.$$

Hier sind die vier Einheiten vereinbarte, unabhängige Grundeinheiten. In der statt dessen gelegentlich zu findenden Angabe

$$\varepsilon_0 = \frac{10^9}{4\pi c^2}\,\frac{\mathrm{Amp \cdot sec}}{\mathrm{Volt \cdot cm}}$$

bedeuten: c nicht eine benannte Zahl, sondern den Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum in $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$, ferner Amp und Volt nicht die vereinbarten unabhängigen Einheiten, sondern die absoluten elektromagnetischen, also Vielfache von Potenzenprodukten der drei mechanischen Grundeinheiten (weshalb man hier klarer Amp abs und Volt abs schreiben würde). Setzt man ihr Verhältnis $\frac{1\ \mathrm{Amp\ abs}}{1\ \mathrm{Volt\ abs}} = 10^{-9}\,\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{cm}}$ ein, so sieht man, daß die obige Angabe nur scheinbar vier Einheiten enthält, also gar nicht folgerichtig zum Mieschen System paßt: nicht die absoluten, sondern die vereinbarten Einheiten für Strom (Ladung) und Spannung sind seine Grundlage. – Es ist denkbar, daß die neuerdings erwogene Abänderung von zwei der drei Einheiten Amp, Volt, Ohm auch eine Änderung gewisser hier (b) angegebener Punkte mit sich bringt; eine Erörterung aller dieser Möglichkeiten ist hier nicht am Platze, zumal da bei diesen zunächst nur in Erwägung gezogenen Vorschlägen Gesichtspunkte der Feinmeßtechnik (Realisierbarkeit, Reproduzierbarkeit der Einheiten) eine maßgebende Rolle spielen. Wir beschränken uns absichtlich auf den gegenwärtigen Tatbestand.

1) Den Vorteil, daß man beliebige Einheiten einsetzen kann, genießen mit einer Einschränkung auch die Maßsystemgleichungen: auch hier muß man Umrechnungsfaktoren kennen, allerdings

das Ergebnis jeweils auf die gewünschte Einheit umzurechnen, mit Hilfe passender Einheitenbeziehungen die Gleichung selbst für einen besonderen Zweck einrichten.[1])

Maßunabhängige Schreibweise oder Auffassung?

Die bisherigen Untersuchungen führten zunächst lediglich zu einer maßsystemfreien Auffassung eines Gleichungensatzes: ein und dieselbe Form (Schreibweise) der Gleichungen kann sowohl als Satz von Maßsystemsgleichungen wie auch als Satz maßunabhängiger Gleichungen verstanden werden, je nachdem ob die Grundeinheiten festgelegt werden oder nicht[2]). Es bleibt noch zu untersuchen, ob es umgekehrt mehrere maßunabhängige Formen für einen Gleichungensatz von gleichem Inhalt gibt, anders ausgedrückt, ob es eine eindeutige und einzige maßunabhängige Form der Gleichungen gibt. Diese Frage ist besonders für die Elektrizitätslehre wichtig, muß aber nicht nur dort, sondern allgemein verneint werden, und zwar sowohl hinsichtlich einzelner Gleichungen wie ganzer zusammengehöriger Sätze. In der Tat waren eingangs an die Form der Gleichungen, wenn sie sowohl zu Maßsystemsgleichungen, als zu maßunabhängigen Gleichungen führen sollten, lediglich gewisse, ziemlich allgemeine Bedingungen gestellt, aber es wurde nicht von einer einzigen möglichen Form ausgegangen: daß diese Bedingungen von mehreren Formen erfüllt werden können, blieb offengelassen und wird durch die Erfahrung bestätigt[1]). Es gibt daher keine eindeutige Schreibweise als maßunabhängige Gleichungen, lediglich eine Auffassung als solche. Die Ausdrucksweise, man habe „die Gleichungen als Größengleichungen geschrieben", darf nicht dahingehend mißverstanden werden, als ob damit eine besondere, als solche eindeutige Form den Gleichungen gegeben würde.

Die Forderungen der Größengleichungslehre.

Unsere Fragestellung war: Wie entsteht ein Satz einheitenfreier Gleichungen? Versteht man mit Wallot unter „Größengleichungen" solche Gleichungen, deren Formelzeichen (nach dem Willen des Schreibers) „Zahl mal Einheit" bedeuten sollen, und daher invariant gegen Einheitenwechsel sind (somit unter „Zahlenwertgleichungen" solche, deren Formelzeichen reine Zahlen sein sollen), und bringt mit „Größengleichungen" die unten genannten zwei Forderungen in Zusammenhang[2]), so erhebt sich die Frage, ob nicht diese Forderungen ebenfalls maßunabhängige Gleichungen definieren. Sie sind[3]):

1. Forderung: „Keine willkürlichen Einheitengleichungen", d. h.: bei der Aufstellung des das Gebiet beschreibenden Gleichungensatzes sind keine willkürlichen Beziehungen zwischen den Einheiten festgesetzt worden[4]).

solche, daß die maßsystemfremden Einheiten herausfallen und schließlich nur noch Einheiten desjenigen Maßsystems dastehen, dem die Form der Gleichung entspricht: auch so kann man nie zu einem falschen Ergebnis kommen.

1) Die Schreibweise, die zum Ausdruck bringt, daß die benutzte Gleichung beiderseits des Gleichheitszeichens mit einer passenden Einheitenbeziehung dividiert oder multipliziert wurde, nennt Wallot „zugeschnittene Größengleichung" (vgl. DIN 1313). Beispiel: Die Gleichung zwischen benannten Zahlen $v = \frac{s}{t}$ kann nach Division mit $27{,}8\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 1\,\frac{\text{km}}{h}$ in der Form geschrieben werden: $\frac{v}{\text{cm/sec}} = 27{,}8\,\frac{s/\text{km}}{t/h}$, sie liefert die Zahlenwerte in bezug auf die angeschriebenen Einheiten. Unabhängig von einer Erörterung über die Namengebung dieser auf Wallot zurückgehenden Form verdient hervorgehoben zu werden, daß sie auch bei weitläufigen Umformungen eine bequeme und sichere Rechenweise bedeutet und eine klare und konsequente Form darstellt.

2) So kommt es, daß die Heavisidesche Form der elektromagnetischen Grundgleichungen sowohl nach dem Vorschlag von Wallot maßsystemfrei verstanden werden kann, als auch die zum Mie'schen Maßsystem passende Form ist.

1) Für die Elektrizitätslehre läßt sich zeigen: man schreibt die elektromagnetischen Gleichungen z. B. in der Form, die sie im Gaußschen Maßsystem annehmen. Läßt man nun die Einheiten von ε und μ offen und wählt vier voneinander unabhängige Grundeinheiten (etwa für Länge, Zeit, Kraft und Ladung), so lassen sich die Einheiten aller elektrischen und magnetischen Größen widerspruchslos mit diesen Grundeinheiten ausdrücken (der Stellung des Faktors c entsprechend erhält man Einheiten für $H \cdot c$ und μ/c^2). Auch die Gaußsche Form des Coulombschen Gesetzes enthält hierbei keine willkürliche Einheitenbeziehung; man kann daher auch nicht diese Form (ohne 4π im Nenner) als „Zahlenwertgleichung" (d. h. unbenannte Zahlen enthaltend) bezeichnen und als solche der Heavisideschen Form (4π im Nenner) als der „Größengleichung" gegenüberstellen (so Wallot, Handb. Pt. 55). Eine als maßunabhängig eindeutig bevorzugte Form der elektromagnetischen Gleichungen gibt es nicht. In der Elektrotechnik befolgt man indessen allgemein Wallots Vorschlag, die Heavisidesche Form maßunabhängig aufzufassen, und in diesem Sinne sind die angegebenen Ausführungen Wallots zu verstehen. Neuere maßunabhängige Formen siehe: F. Emde, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht **48**, 145, 1935; J. Fischer, Physik. Zeitschr. **36**, 914, 1935.

2) So Wallot, Handb., a. a. O. Pt. A 5), S. 3.

3) J. Wallot, Elektrotechn. Zeitschr. 43, Pt. 5, 6, 21, 1922.

4) Wie das z. B. hinsichtlich gewisser Koeffizienten bei den „absoluten" Maßsystemen der Elektrizitätslehre geschieht.

2. Forderung: „Grundsätzlich ist überall und immer unter dem Formelzeichen die physikalische Größe" selbst zu verstehen, d. h. das Produkt: Zahlenwert mal Einheit.

Hierzu ist zu bemerken: Wenn auch in der Maßsystemsgleichung unter den Formelzeichen unbenannte Zahlen verstanden werden dürfen, weil die abgestimmten Einheiten „sich herauskürzen", so besteht dazu doch kein Zwang, vielmehr ist es stets möglich, jedes Formelzeichen als „Zahl mal (Maßsystems-) Einheit" anzusehen. Daß man deswegen, weil man einen Einheitensatz passend gemacht (d. h. ein Maßsystem entwickelt) hat, die Formelzeichen der Maßsystemsgleichungen ausschließlich als unbenannte Zahlen ansehen müsse, wird sich kaum beweisen lassen[1]). Auch Maßsystemsgleichungen können also die zweite Forderung erfüllen. Die erste Forderung wird von den „absoluten" Maßsystemen der Elektrizitätslehre nicht erfüllt, da die in ihnen geübte Verfügung über ε und μ eine willkürlich festgelegte Beziehung zwischen den Einheiten zweier Größen bedeutet. In der Elektrizitätslehre vermeidet das Mie'sche Maßsystem derartige Festsetzungen, und ebenso gibt es solche nicht in den üblichen Darstellungen der Wärmelehre und der Mechanik: alle diese Maßsystemsgleichungen erfüllen also neben der zweiten auch die erste der an „Größengleichungen" gestellten Forderungen, ohne solche zu sein. Die oben geübte genetische Darstellung ist offenbar vollständiger.

Zusammenfassung.

Ziel: Beitrag zur Begriffsbildung hinsichtlich des „Rechnens mit physikalischen Größen in Gleichungen". Untersuchung der Begriffe: Einheit, Benennung, Dimension auf Grund von Helmholtz unternommener Untersuchungen zur Theorie benannter Zahlen: Zwei Auffassungen des Begriffes „Einheit": primitive (beziehungslose) Einheiten, abgeleitete Einheiten (unmittelbare und mittelbare). Der Quotient verschiedener Einheiten derselben physikalischen Größe je nach Auffassung eine unbenannte oder eine benannte Zahl. „Benennung" als Beziehung zu Grundeinheiten von unbestimmtem Zahlenwert, „Dimension" als den Wechsel der Grundeinheitenbeträge betreffende Zahl im Sinne Fouriers. — Zwei Arten von Größen (additive Größen und Koeffizienten) und die Bedingungen, unter denen mit Größen als benannten Zahlen in Gleichungen gerechnet werden kann. — Ein Gleichungensatz aus benannten Zahlen maßabhängig oder maßunabhängig und daher unempfindlich (invariant) gegen Einheitenwechsel je nach Festlegung oder Unbestimmtlassen der unabhängigen Grundeinheiten. Eigenschaften der maßunabhängigen und der einheitenbezogenen Gleichungen beim Zahlenrechnen. — Möglichkeit, mehrere Formen eines Gleichungensatzes von gleichem Inhalt maßunabhängig aufzufassen, weswegen die Angabe, Gleichungen seien „als Größengleichungen geschrieben", keine besondere Form festlegt. — Zwei häufig als kennzeichnend für „Größengleichungen" angesehene Forderungen definieren nicht eindeutig.

Karlsruhe 1935, Lehrstuhl für theoretische Elektrotechnik und Schwachstromtechnik der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 17. November 1935.)

Über den Zusammenhang zwischen Beleuchtung und Stromstärke bei Sperrschichtphotozellen.

Von Evert Elvegård.

Schon kurz nach der Erfindung des Lichtelementes oder der Sperrschichtzelle[1]) wurde festgestellt, daß der bei Beleuchtung der Zelle entstandene elektrische Strom nicht genau proportional der auffallenden Beleuchtung sei. Nur wenn der äußere Schließungskreis einen verschwindend kleinen Widerstand hat, besteht Linearität[2]), in anderen Fällen nimmt der Strom langsamer zu als die Beleuchtung. Bei Steigerung derselben scheint sich die Stromstärke schließlich einem Grenzwert zu nähern. Auch die erzeugte EMK ist nicht proportional der Beleuchtung, sondern verhält sich ähnlich wie die Stromstärke bei endlichen Widerständen. Bei Vergrößern des äußeren Widerstandes und konstanter Beleuchtung nimmt die Stromstärke ab, aber nicht nach dem Ohmschen Gesetz, sondern langsamer als es diesem Gesetz entspricht. Fig. 1.

Die Gesetzmäßigkeit, die zwischen Stromstärke i und Beleuchtung B besteht, kommt zum Vorschein, wenn man die Werte $1/i$ gegen $1/B$ aufträgt. Wie aus dem Beispiel in Fig. 2 ersichtlich ist, erhält man dabei gerade Linien, die nicht

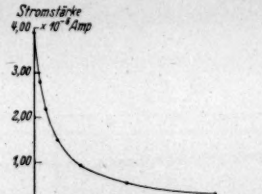

Fig. 1. Veränderung der Stromstärke mit dem äußeren Widerstande des Photozellenkreises bei konstanter Beleuchtung.

1) Auch beim Rechnen mit Maßsystemgleichungen werden viele Physiker „das Gefühl haben", mit benannten Zahlen zu rechnen.

1) B. Lange, Physik. Zeitschr. **31**, 139—140, 1930.

2) O. v. Auwers u. H. Kerschbaum, Ann. d. Phys. (5) **7**, 129—175, 1930.

durch den Ursprung gehen und deren Neigung steiler wird, je größer der Widerstand im Schließungskreis ist. Die Linien schneiden sich in einem gemeinsamen Drehpunkt. Der Abschnitt auf der Ordinatenachse ist gleich dem Wert für $1/\sqrt{i}$, wenn die Beleuchtung unendlich groß wird. Der entsprechende Wert für $i - i_\infty$ ist also die maximale Stromstärke, die das Photoelement bei dem betreffenden, äußeren Widerstande zu

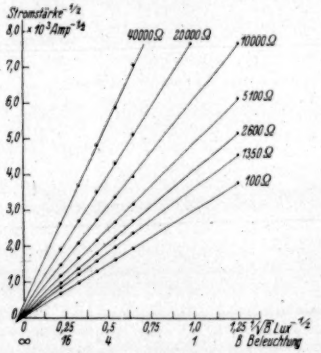

Fig. 2. Zusammenhang zwischen Stromstärke und Beleuchtung der Photozelle bei verschiedenen äußeren Widerständen.

liefern imstande ist. Bezeichnet man den Winkelkoeffizienten mit k, so ist die Gleichung der Linien

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{i_\infty}} . \qquad (1)$$

Bezeichnet man weiter die Koordinaten des Drehpunktes mit x_1, y_1, lautet die Bedingung, daß dieser Punkt auf den Geraden liegt

$$y_1 = k \cdot x_1 + \frac{1}{\sqrt{i_\infty}} .$$

Hieraus erhält man

$$k = \frac{1}{x_1}\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{i_\infty}}\right) \qquad (2)$$

und die allgemeine Gleichung der Geraden

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{x_1\sqrt{B}}\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{i_\infty}}\right) + \frac{1}{\sqrt{i_\infty}}$$

die sich in folgende symmetrische Form umformen läßt

$$1 - \frac{1}{y_1\sqrt{i}} = \left(1 - \frac{1}{y_1\sqrt{i_\infty}}\right)\left(1 - \frac{1}{x_1\sqrt{B}}\right) \qquad (3)$$

Gleichung (3) *ist der allgemeine Ausdruck für den Zusammenhang zwischen der Stromstärke und der Beleuchtung des Lichtelementes bei verschiedenen äußeren Widerständen.* Darin sind x_1 und y_1 Konstanten für die betreffende Zelle und i_∞ eine Funktion des äußeren Widerstandes R,

$$i_\infty = f(R) .$$

Bei Lichtmessungen in der Praxis arbeitet man im allgemeinen mit einem bestimmten äußeren Widerstande, hauptsächlich bestehend aus dem Galvanometerwiderstande selbst. Für diesen Fall kann man Gleichung (1) in geeigneter Weise schreiben

$$B = \frac{i}{(k_1 - k_2\sqrt{i})^2}$$

oder

$$B = \frac{k_1' i}{(1 - k_2'\sqrt{i})^2} . \qquad (4)$$

In diesen Formeln sind k_1 und k_2, bzw. k_1' und k_2' Konstanten für die betreffende Versuchsanordnung, die zweckmäßigerweise aus einer Serie bekannter Beleuchtungswerte und dazugehöriger gemessener Stromstärkewerte graphisch bestimmt werden. *Mit Hilfe von Gleichung* (4) *kann man das Photoelement für exakte Beleuchtungsmessungen verwenden, bzw. für seine Abweichung von der Proportionalität korrigieren.*

Untersucht wurde eine Anzahl Selensperrschichtzellen von der Süddeutschen Apparatefabrik in Nürnberg, eine ähnliche Zelle von Tungsram und eine Kupferoxydulvorderwandzelle von Siemens. Die Beleuchtung wurde auf der optischen Bank durch Abstandsänderung variiert. Als Lichtquelle dienten Niedervoltlampen für 6 bzw. 30 Volt, die mit konstanter Spannung gebrannt wurden. Die Lichtstärke der Lampen bei den benutzten Brennspannungen wurde durch Vergleich mit von der P.T.R. geeichten Normallampen bestimmt. Der in der Photozelle erzeugte elektrische Strom wurde mit einem Drehspulspiegelgalvanometer gemessen, dessen Eigenwiderstand 100 Ohm betrug. Die Skala des Galvanometers war bei einer größeren Anzahl von Punkten geeicht, so daß jeder Ausschlag in die richtige entsprechende Stromstärke umgerechnet werden konnte. Zur Vergrößerung des äußeren Widerstandes des Photozellenkreises diente ein Präzisionsrheostat. Das Galvanometer besaß zwei Spulen, von denen die nichtbenutzte mit einem angepaßten Dämpfungswiderstand geschlossen war, wodurch die Schwingungen des Galvanometers praktisch aperiodisch bei allen Widerständen des Kreises blieben. In einigen Fällen wurde der Strom mit einem Kompensationsapparat gemessen, mit dem ebenfalls die erzeugte EMK der Zelle bestimmt wurde.

Die Sperrschichtzellen zeigen einen für die Messungen recht störenden Ermüdungseffekt[1]). Der sofort nach Einschalten der Beleuchtung entstandene Ausschlag des Galvanometers sinkt

1) Goldmann u. Lukasiewitsch, Physik. Zeitschr. **34**, 67, 1933.

bei fortdauernder Beleuchtung allmählich, um sich schließlich auf einen gewissen Endwert einzustellen. Dieser kann 3–4 Proz. oder mehr unter dem Anfangswert liegen und wird praktisch in etwa 15 Minuten erreicht. Es empfiehlt sich deswegen, vor jeder Versuchsreihe die Zelle im voraus der größten vorkommenden Beleuchtung etwa 15 Minuten lang auszusetzen, um sie ins Gleichgewicht zu bringen. Goldmann und Lukasiewitsch[1]) haben gezeigt, daß der Ermüdungseffekt zum großen Teil von den ultraroten Strahlen der Lichtquelle verursacht wird und sich durch Vorsetzen von Filtern, die diese Strahlen absorbieren, verringern läßt.

Beim Ausschalten der Beleuchtung bleibt ein schwacher Reststrom im Kreis fließend, der einen kleinen Ausschlag des Galvanometers bewirkt, welcher erst langsam verschwindet. Dieser Reststrom äußert sich wie eine Nullpunktveränderung und ist auch wie eine solche zu behandeln, d. h. einfach durch Verschieben der Galvanometerskala oder durch Subtraktion zu eliminieren.

Um zu untersuchen, ob die erwähnte Gesetzmäßigkeit zwischen Photostrom und Beleuchtung von der Art beeinflußt wird, wie die Zelle beleuchtet wird, wurde bei einigen Versuchen die Zelle zuerst bei starkem Licht vorbeleuchtet und bei anderen umgekehrt so kurz wie möglich der Strahlung ausgesetzt. In den letzteren Fällen wurde also der Ausschlag möglichst schnell nach Einschalten des Lichtes abgelesen und die Zelle dann sofort wieder verdunkelt. So konnte auch der Reststrom, der etwa 0,2–0,4 Proz. des vollen Ausschlages ausmachte, beobachtet und vom Ausschlag abgezogen werden. Die gefundene Gesetzmäßigkeit traf bei beiden Arten des Beleuchtens zu, nur nahmen die Konstanten andere Zahlenwerte an.

Die Formel ist geprüft und bestätigt worden für Beleuchtungsstärken zwischen 0,1 bis 3000 Lux. Orientierende Versuche zeigen aber, daß die Gültigkeit sich wahrscheinlich bis über 10000 Lux erstreckt.

Das Gesetz war richtig für alle geprüften Zellentypen und bei allen untersuchten äußeren Widerständen von 100 Ohm bis 640000 Ohm. Über die Genauigkeit, mit der es die Wirklichkeit beschreibt, gibt die weiter unten stehende Tabelle ein Beispiel. Der Ausdruck (4) war für diesen Fall

$$B = \frac{i \cdot 10^7}{(0{,}6086 - 60{,}5\sqrt{i})^2} \text{ Lux. } (i \text{ in Amp.})$$

Für verschiedene Zellen nehmen die Konstanten ziemlich verschiedene Werte an. Im allgemeinen scheinen die empfindlicheren Zellen auch günstiger zu sein in bezug auf die Einwirkung des äußeren Widerstandes; die Linien für verschiedene Widerstände streuen weniger für diese Zellen, wie Fig. 3 veranschaulicht. B ist

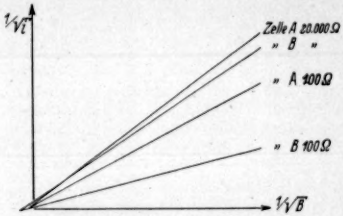

Fig. 3. Unterschied in der Einwirkung des äußeren Widerstandes bei verschiedenen Zellen.

eine unempfindlichere Zelle, deren Ausschlag bei konstanter Beleuchtung aber verschiedenem Widerstand sich relativ mehr verändert als bei der Zelle A.

Auch die EMK der Zelle folgt derselben Gesetzmäßigkeit. Fig. 4 gibt dafür ein Beispiel, wobei die EMK mit einem Kompensationsapparat gemessen wurde.

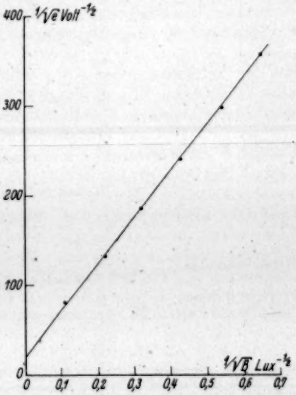

Fig. 4. Zusammenhang zwischen EMK. und Beleuchtung.

In der Literatur findet man nur wenige Versuche, einen mathematischen Ausdruck für den Zusammenhang zwischen der Stromstärke bzw. EMK und der Beleuchtung zu geben. O. v. Auwers und H. Kerschbaum[1]) geben folgende Formel für den Photostrom I_1 durch das Galvanometer an:

$$I_1 = \frac{R_0}{R_a + R_0} I_e + R_0' \frac{R_a^2}{(R_a + R_0)^3} I_e^2, \quad (5)$$

1) l. c.

1) l. c.

worin R_0 den Dunkelwiderstand der Zelle in der Stromrichtung, R_a den Widerstand des äußeren Galvanometerkreises und I_e den unmittelbar vom Licht erzeugten Strom bedeutet, der proportional der Beleuchtung angenommen wird. R_0' ist ein Faktor, der die Veränderung des Dunkelwiderstandes der Zelle mit dem durchfließenden elektrischen Strom angibt. Die Formel (5) wird durch Division mit R_a aus dem folgenden theoretisch abgeleiteten Ausdruck für die Klemmspannung v_1 der Zelle erhalten:

$$V_1 = I_e \frac{R_a R_0}{R_a + R_0} \left(1 + \frac{R_0' R_a^2}{R_0 (R_a + R_0)^2} I_e\right). \quad (6)$$

Indessen haben die Verfasser bei der Ableitung der Gleichung (6) einen Rechenfehler begangen. Aus ihrer theoretischen Ausgangsformel für v_1 erhält man nämlich bei richtigem Rechnen statt (6) den Ausdruck

$$V_1 = I_e \frac{R_a R_0}{R_a + R_0} \left(1 + \frac{R_0' R_a^2}{R_0 (R_a + R_0)^2 + R_0 R_0' R_a I_e} I_e\right).$$

Die Verfasser ziehen aus ihrer Formel (5) den Schluß, daß der Galvanometerstrom I_1 gleich I_e, d. h. proportional der Beleuchtung wird, wenn der äußere Widerstand R_a gleich Null gemacht wird. Dagegen zeigt die Spannung V_1 für $R_a = \infty$, d. h. die EMK der Zelle, kein lineares Anwachsen mit steigender Beleuchtung. Experimentell wird die Formel nicht bei endlichen Widerständen geprüft, sondern es wird nur festgestellt, daß bei den erwähnten Extremwerten ein linearer bzw. nichtlinearer Zusammenhang mit der Beleuchtung besteht. Dies kann aber nicht als genügendes Kriterium für die Richtigkeit der Formel und ihre theoretischen Voraussetzungen gelten.

Goldmann und Lukasiewitsch[1]) geben für den Zusammenhang zwischen der EMK der Zelle und der Beleuchtung B folgenden Ausdruck an:

$$V = M \frac{B}{B + MN},$$

worin M und N Konstanten sind. Umgeformt wird die Formel:

$$\frac{1}{V} = N \frac{1}{B} + \frac{1}{M}. \quad (7)$$

$1/V$ als Funktion von $1/B$, abgetragen in einem Diagramm, soll also eine gerade Linie geben, die die $1/V$-Achse in dem Punkte $1/M$ schneidet.

Die Formel (7) zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit dem vom Verfasser gefundenen Ausdruck (1), der wie oben erwähnt auch für die EMK gültig ist. Da die Übereinstimmung der Formel (7) mit den experimentellen Daten von Goldmann und Lukasiewitsch recht gut ist, könnte man vermuten, daß eben sie die richtige und auch für die Stromstärke zutreffend sei. Gewisse Versuchsserien zeigen nun, daß der Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken manchmal sehr gering ist. Die betreffenden Versuche, aufgetragen in einem Diagramm einmal als $1/\sqrt{i} = f(1/\sqrt{B})$ und das andere Mal als $1/i = f(1/B)$, gaben in der Tat gute Gradlinigkeit in beiden Fällen. Selbst die von Goldmann und Lukasiewitsch in ihrer Tabelle II angegebenen Werte zeigen, $1/\sqrt{V}$ als Funktion von $1/\sqrt{B}$ aufgetragen, eine ebenso gute gerade Linie, wie Goldmann und Lukasiewitsch in ihrer Fig. 3 für $1/V = f(1/B)$ darstellen.

Um den Unterschied der beiden Formeln näher festzustellen, wollen wir sie in folgender Form schreiben:

$$B_1 = \frac{i}{a - bi}$$

nach Goldmann und Lukasiewitsch,

$$B_2 = \frac{i}{(c - d\sqrt{i})^2}$$ nach dem Verfasser.

Das Verhältnis α von B, nach den beiden Formeln berechnet, wird dann:

$$\alpha = \frac{B_1}{B_2} = \frac{(c - d\sqrt{i})^2}{a - bi}.$$

Das Verhältnis ist also wieder eine Funktion von i. Es hat ein Minimum bei

$$i = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right)^2,$$

und nähert sich bei sinkender Stromstärke dem konstanten Wert c^2/a.

Werden die graphisch bestimmten Werte für die vier Konstanten a, b, c und d aus einem Versuch in dem Ausdruck für α eingesetzt, und zeichnet man die so erhaltene Funktion zwischen α und i, bekommt man eine Kurve von dem Typus wie in Fig. 5. In einem ausgedehnten Gebiet ist das Verhältnis fast gleich 1. Die beiden Ausdrücke geben also in diesem Gebiet beinahe denselben Wert für B und sind insofern fast gleichwertig. Mit a/b Amp. würde die Stromstärke, wenn die Formel für B_1 gültig wäre, ihren höchstmöglichsten Wert erreichen. B_1 ist dann ∞ und damit auch α. In der Nähe dieser Stromstärke wächst die Funktion α wie ersichtlich stark an. In diesem Stromstärkegebiet geben also die beiden Ausdrücke sehr verschiedene Werte für die Beleuchtung B und man würde feststellen können, welche von ihnen die experimentell bestimmte Beleuchtung am besten angibt.

1) l. c.

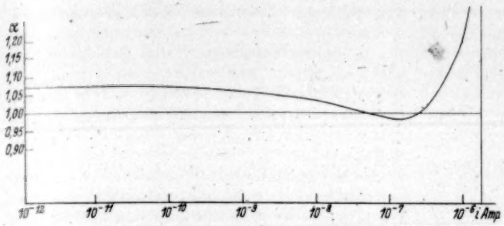

Fig. 5. Verhältnis der berechneten Beleuchtungswerte nach den Formeln von Goldmann und Lukasiewitsch und dem Verfasser.

In Fig. 6 und der untenstehenden Tabelle ist einer der entscheidenden Versuche wiedergegeben. Die experimentellen Daten sind einerseits als $1/i = f(1/B)$ und andererseits als $1/\sqrt{i} = f(1/\sqrt{B})$ abgetragen. Im ersten Falle erhält man eine deutlich gebogene Kurve, im zweiten dagegen eine gute, gerade Linie. Die Formel nach dem Verfasser gibt also die Wirklichkeit am besten wieder und muß als die richtige bezeichnet werden.

Beleuchtung B	Stromstärke i	Beleuchtung berechn.: B_2	Abweichung $(B_2 - B)/B$
10,00 Lux	$33{,}2 \cdot 10^{-8}$ A	10,08 Lux	+ 0,8 Proz.
9,07	30,3	9,17	+ 1,2
8,26	27,63	8,31	+ 0,61
7,56	25,2	7,54	− 0,26
6,94	23,3	6,94	± 0
6,40	21,55	6,40	± 0
5,92	20,0	5,92	± 0
5,49	18,55	5,47	− 0,36
5,10	17,4	5,11	+ 0,20
4,75	16,2	4,75	± 0,00
4,44	15,3	4,47	+ 0,67
4,16	14,3	4,16	± 0
3,91	13,4	3,90	− 0,26
3,68	12,7	3,68	± 0,
3,46	12,0	3,47	+ 0,29
3,26	11,25	3,25	− 0,31
		Durchschnittlich	± 0,31

S. A. F. Selensperrschichtzelle. Äußerer Widerstand 10000 Ohm. Zelle vorbeleuchtet mit 10 Lux. Formel auf S. 132.

Zur vollständigen mathematischen Darstellung des Verhaltens der Lichtelemente gehört noch eine nähere Kennzeichnung der Funktion

$$i_\infty = f(R).$$

Diese ist indessen Gegenstand weiterer Untersuchungen, die mit einer Anknüpfung an die Theorie später veröffentlicht werden sollen.

Zusammenfassung:

Es wurden bei verschiedenen Lichtelementen wie Selen- und Cu_2O-Sperrschichtzellen Messungen der Beleuchtung B und der Stärke i des erzeugten Photostromes bei verschiedenen äußeren Widerständen ausgeführt und folgender Zusammenhang zwischen diesen Größen gefunden:

$$1 - \frac{1}{y_1\sqrt{i}} = \left(1 - \frac{1}{y_1\sqrt{i_\infty}}\right)\left(1 - \frac{1}{x_1\sqrt{B}}\right),$$

worin x_1 und y_1 Konstanten für die betreffende Zelle sind und i_∞ abhängig von dem äußeren Widerstande ist. Für den praktischen Gebrauch läßt sich die Gleichung besser schreiben:

$$B = \frac{i}{(k_1 - k_2\sqrt{i})^2},$$

mit deren Hilfe man Beleuchtungen mittels des Lichtelementes exakt messen kann.

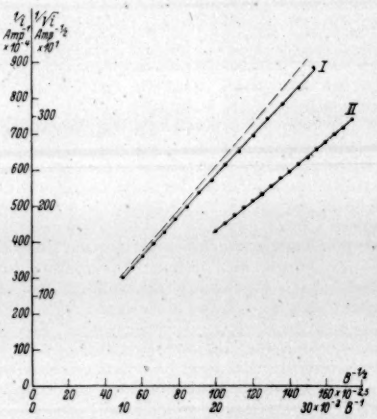

Fig. 6.

Kurve I: $1/i = f(1/B)$. Kurve II: $1/\sqrt{i} = f(1/\sqrt{B})$. Durch Vergleich mit der eingezeichneten Geraden (gestrichelt) ist die Krümmung der Kurve I deutlich ersichtlich.

Stockholm (Schweden), Mitteilung aus dem Laboratorium von A. B. Hammarbylampan.

(Eingegangen 16. November 1935.)

Brechungsexponent und Molrefraktion des Selenwasserstoffs und des Selendeuterids.

Von O. E. Frivold, O. Hassel und T. Skjulstad.

1. In einer früheren Notiz[1]) haben wir einige vorläufige Messungen des Brechungsexponenten des gasförmigen Selenwasserstoffs und die daraus berechnete Molrefraktion mitgeteilt. Es wurde damals ausdrücklich betont, daß die Messungen keinen Anspruch auf hohe Präzision machen konnten. Es soll hier kurz über spätere Messungen berichtet werden, die sich gleichzeitig auf Selendeuterid bezogen; diese haben gezeigt, daß die gefundenen Werte zweifellos etwas zu niedrig waren[2]).

Bei interferometrischen Messungen spielt die Reinheit des Gases eine ausschlaggebende Rolle; schon minimale Mengen von Wasserdampf werden auf Messungen an Selenwasserstoff einen merklichen Einfluß ausüben. Das Gas wurde deshalb nicht als genügend trocken angesehen, wenn bei seiner Herstellung mit einem Überschuß von Al_2Se_3 getrocknet wurde. Es wurde deshalb nach dem Durchgang durch ein Ausfriergefäß F_1 (vgl. Fig. 1), welches auf etwa $-20°$ gekühlt war, fraktioniert. Es wurde so verfahren, daß das Selenid über Nacht in einem evakuierten Glaskolben (A) aufgehoben, und dann im Hochvakuum ($p \simeq 0{,}002$ mm Hg) Wasser zugetropft wurde (auf Al_2Se_3 immer weniger als $3\,H_2O$!). Nach mindestens einer Stunde wurde das Gas im langsamen Strom durch die schon erwähnte Falle F_1 geleitet, in der Wasser und eventuelle andere schwer flüchtige Verunreinigungen ausgefroren wurden, und in einer zweiten Falle F_2, die mit Azeton und festem CO_2 gekühlt war, kondensiert. Flüchtigere Bestandteile wurden dabei abgepumpt, bzw. in einer dritten, leicht auswechselbaren Falle F_3 kondensiert. Zwecks weiterer Reinigung der in F_2 kondensierten Fraktion wurde das Kühlbad hier langsam entfernt und die „mittlere" Fraktion in einem Ausfriergefäß F_4 kondensiert, welches mit dem hoch evakuierten Vorratsballon (B) und dem Meßrohr des Interferometers in Verbindung stand.

Es wurden drei verschiedene Gasportionen H_2Se und zwei verschiedene Portionen D_2Se für die Messungen verwendet. Zwischen zwei Meßserien wurde das Rohrsystem ausgepumpt und der Glaskolben (A), das Manometer (M) und die Ausfriergefäße ($F_1 - F_4$) gereinigt, ehe mit der Darstellung einer neuen Gasmenge angefangen wurde.

2. Das Interferometer war das früher erwähnte Jaminsche der Firma Steeg u. Reuter. Die mittels Kathetometer und geeichtem Normalstab gemessene Länge des Meßrohres betrug $41{,}121 \pm 0{,}002$ cm. Da der Druck im Meßrohr immer kleiner war als der Atmosphärendruck, wurde er gegen die freie Atmosphäre mittels eines Quecksilbermanometers gemessen, dabei stand ein im Kewer Observatorium hergestelltes und im hiesigen meteorologischen Institut geeichtes Barometer zur Verfügung. Die Abweichung der Angaben dieses Barometers und desjenigen des Quecksilbermanometers der Apparatur überstieg in keinem Falle 0,04 mm. Das benutzte Kathetometer mit zwei Fernrohren war erschütterungsfrei an demselben Steinblock befestigt, der den Interferometertisch trug.

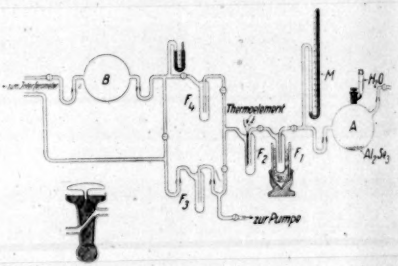

Fig. 1.

3. Wie in den früheren Versuchen mit H_2Se wurde auch diesmal in fast allen Fällen nach Aufhören des Gaseinströmens in das Meßrohr ein Sinken des Druckes und auch der Streifenzahl beobachtet. Der Effekt war jedoch kleiner als bei den früheren Messungen, was wahrscheinlich damit zusammenhängt, daß das Gas diesmal schärfer getrocknet war. Es stand uns leider kein Meßrohr aus Quarz zur Verfügung, sondern es wurde wie früher ein Rohr aus Messing verwendet. Es ist wohl anzunehmen, daß der Effekt jedenfalls zum größten Teil auf einer Spaltung des Gases beruht, die von der Metallwand begünstigt wird. Da anzunehmen ist, daß der Effekt während der ganzen Einströmungszeit wirksam ist, könnte man versucht sein, nicht die Werte von Druck (p) und Streifenzahl (N) beim Schließen des Hahnes zur Berechnung des Brechungsexponenten zu verwenden, sondern mittels Beobachtungen von p und N in einem anschließenden Zeitintervall auf den Brechungsexponenten des Gases beim Beginn des Einströmens ($t = 0$) zu extrapolieren. Um

1) O. E. Frivold und O. Hassel, Zeitschr. f. phys. Chemie (B) **27**, 316—318, 1934.

2) Es wurden früher folgende Werte des Brechungsexponenten (n) und der Molrefraktion (R) von H_2Se für die D_3-Linie gefunden: $n = 1{,}000\,788$ und $R = 11{,}77$.

möglichst willkürfrei zu verfahren, verwenden wir bei der Bestimmung der Molrefraktion jedoch den Wert des Brechungsexponenten, der aus den Werten des Druckes und der Streifenzahl bei der ersten Ablesung folgt. Daneben geben wir aber auch den Wert an, der für $t = 0$ extrapoliert wird. (n_0^*).

Als Lichtquellen dienten eine Entladungsröhre mit Wasserstoff, eine Quecksilberlampe und eine Natriumlampe; im ersten Falle wurde ein Rotfilter, in den beiden letzteren Fällen wurde ein Monochromator verwendet. Die Wellenlängen waren: $\lambda = 6562{,}8$ Å (H_α), $\lambda = 5460{,}7$ (die grüne Hg-Linie), $\lambda = 5893{,}0$ (D-Linie).

4. Die Extrapolation auf den idealen Gaszustand erfolgte wie früher mittels der Gleichung:

$$n_0 - 1 = \frac{\lambda \cdot 76 \cdot N(1 + \alpha t)}{L \cdot p\left(1 + \varphi \frac{p}{76}\right)},$$

wo n_0 den berechneten Brechungsindex bei 0° C und einem Druck von 76 cm Hg im idealen Gaszustand bedeutet. Alle Druckmessungen beziehen sich auf Hg von 0° C und 45° geographischer Breite. λ ist die Wellenlänge des Lichtes, N die gemessene Streifenzahl und L die Länge des Meßrohres. p ist der (End-) Druck (in cm Hg), α der thermische Ausdehnungskoeffizient des Gases und φ mißt die Abweichung vom Boyle-Mariottschen Gesetz (wir haben dafür den Wert 0,012 benutzt, der aus den Messungen von Bruylantes und Dondeyne[1]) folgt). Der Ausdehnungskoeffizient α (zwischen 0° C und 40° C) bei 76 cm Hg-Druck wurde gleich $0{,}00378_5$ gesetzt. Dieser α-Wert folgt aus dem in besonderen Versuchen ermittelten Druckkoeffizienten β_{14} (bei 14 cm Hg) = 0,003677 und dem aus den Messungen von Bruylantes und Dondeyne[2]) berechneten Wert des Kompressibilitätskoeffizienten $\varkappa_{14} = 1{,}00163$, woaus $\alpha_{14} = 0{,}003683$ folgt[3]). Die Temperatur wurde an einem in $^1/_{10}$ Grad geteilten Quecksilberthermometer abgelesen, welches mit einem Normal-Widerstandsthermometer von Leeds und Northrup verglichen wurde. Das letztere war vom Bureau of Standards geeicht.

5. Die Meßresultate an H_2Se und an D_2Se sind in den folgenden Tabellen wiedergegeben. Das verwendete Deuteriumoxyd von der Norsk Hydro-Elektrisk Kvælstofaktieselskab war 98prozentig. Es wird Temperatur t, Druck p und Streifenzahl N im Augenblick des beendeten Einströmens des Gases sowie der hieraus berechnete $n_0 - 1$-Wert angegeben. Daneben wird der auf $t = 0$ extrapolierte Wert $n_0^* - 1$ mitgeteilt, um eine Vorstellung von der Unsicherheit der Messungen wegen der Unstabilität des Gases zu geben.

Messungen, die sich auf eine und dieselbe Gasportion beziehen, sind in den Tabellen fortlaufend mitgeteilt; beim Übergang zu einer neuen Portion sind die Zahlen durch einen horizontalen Strich voneinander getrennt.

Tabelle I.

H_2Se. $\lambda_{H_\alpha} = 6562{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm.

t	p	N	$(n_0 - 1) \cdot 10^8$	$(n_0^* - 1) \cdot 10^8$
17,36	21,168	131,56	799,5	802,0
18,66	23,422	145,00	799,7	802,8
17,36	16,234	100,80	799,3	800,6
18,86	15,573	96,16	799,0	801,1
16,31	11,328	70,56	799,4	800,6
15,70	11,329	70,70	799,2	800,6
15,23	10,480	65,50	799,2	800,2
18,44	8,130	50,26	799,6	800,6
17,81	8,116	50,28	799,5	800,5
16,36	22,333	139,08	798,2	799,2
16,83	63,292	395,52	798,0	798,6
16,91	54,934	342,68	797,7	799,3
15,47	23,358	145,68	796,8	798,0
14,96	23,179	145,00	797,8	799,0
16,78	23,965	149,00	797,9	799,2
16,34	23,296	145,04	797,8	800,0
18,66	23,447	144,74	797,5	799,1
18,47	23,429	144,84	798,1	799,3
18,01	14,623	90,48	798,5	800,0

Mittelwert: $(n_0 - 1) \cdot 10^8 = 798{,}3 \pm 0{,}3$

„ $(n_0^* - 1) \cdot 10^8 = 799{,}7 \pm 0{,}3$

$R_{H_2Se} = 11{,}928$

$R^*_{H_2Se} = 11{,}949$

Tabelle II.

D_2Se. $\lambda_{H\alpha} = 6562{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm.

t	p	N	$(n_0 - 1) \cdot 10^8$	$(n_0^* - 1) \cdot 10^8$
17,21	16,201	100,19	795,7	796,0
17,50	16,265	100,41	795,1	796,1
16,96	16,238	100,34	794,4	794,8
16,57	12,990	80,36	794,5	794,5
15,07	16,076	100,23	796,3	796,7
14,67	15,635	97,43	794,8	795,4
13,79	14,469	90,40	794,5	794,8
15,26	14,547	90,52	795,4	796,6
13,78	15,684	98,18	795,9	796,6
16,27	16,191	100,33	794,7	795,8

Mittelwert: $(n_0 - 1) \cdot 10^8 = 795{,}1 \pm 0{,}3$

„ $(n_0^* - 1) \cdot 10^8 = 795{,}8 \pm 0{,}3$

$R_{D_2Se} = 11{,}880$ $\quad R_{H_2Se} - R_{D_2Se} = 0{,}048$

$R^*_{D_2Se} = 11{,}890$ $\quad R^*_{H_2Se} - R^*_{D_2Se} = 0{,}059$

1) Bull. Acad. Belg. Classe Sci. (5) **8** (1922) S. 382.

2) $\alpha = 0{,}00366 + (0{,}003683 - 0{,}00366) \frac{p}{14} \cdot \varkappa$

3) Bei der Mittelwertbildung ist das Gewicht der einzelnen Messungen dem Druck p proportional gesetzt worden.

1) $R = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \cdot 22415$.

Unter jeder Tabelle werden die Mittelwerte von $(n_0 - 1) \cdot 10^6$ bzw. $(n_0^* - 1) \cdot 10^6$[3]), sowie die Molrefraktionen R_{H_2Se}, R_{D_2Se}, (bzw. $R^*_{H_2Se}$ und $R^*_{D_2Se}$) aufgeführt[1]). Endlich wird der Unterschied $R_{H_2Se} - R_{D_2Se}$ (bzw. $R^*_{H_2Se} - R^*_{D_2Se}$) der

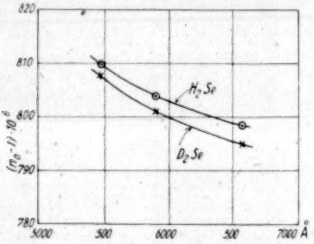

Fig. 2.

Molrefraktion des Selenwasserstoffs und des Selendeuterids mitgeteilt. Die Dispersionskurven des H_2Se bzw. D_2Se sind in der Fig. 2 wiedergegeben.

Tabelle III.

H_2Se. $\lambda_{Na} = 5893{,}0 \cdot 10^{-8}$ cm.

t	p	N	$(n_0 - 1) \cdot 10^6$	$(n_0^* - 1) \cdot 10^6$
19,07	23,123	160,13	804,5	805,7
20,07	23,221	160,20	804,2	805,4
19,46	18,800	129,79	803,5	805,6
16,06	12,919	90,15	803,3	804,9
19,74	13,091	90,23	803,6	804,8
17,36	13,001	90,38	803,9	805,0

Mittelwert: $(n_0 - 1) \cdot 10^6 = 803{,}9 \pm 0{,}2$
„ $(n_0^* - 1) \cdot 10^6 = 805{,}3 \pm 0{,}2$

$R = 12{,}011$
$R^* = 12{,}032$

Tabelle IV.

D_2Se. $\lambda_{Na} = 5893{,}0 \cdot 10^{-8}$ cm.

t	p	N	$(n_0 - 1) \cdot 10^6$	$(n_0^* - 1) \cdot 10^6$
18,79	11,673	80,48	801,4	803,0
15,97	11,545	80,40	801,6	802,0
15,43	14,351	100,1	801,1	803,0
16,63	14,350	99,64	800,8	801,8
17,43	14,524	100,55	800,6	802,1
18,33	14,564	100,57	801,1	801,8
16,86	13,036	94,03	801,1	802,2
21,06	14,059	100,36	801.7	802,8

Mittelwert: $(n_0 - 1) \cdot 10^6 = 801{,}2 \pm 0{,}2$
„ $(n_0^* - 1) \cdot 10^6 = 802{,}3 \pm 0{,}2$

$R_{D_2Se} = 11{,}971$ $\quad R_{H_2Se} - R_{D_2Se} = 0{,}040$
$R^*_{D_2Se} = 11{,}987$ $\quad R^*_{H_2Se} - R^*_{D_2Se} = 0{,}045$

Tabelle V.

H_2Se. $\lambda_{Hg} = 5460{,}7 \cdot 10^{-8}$ cm.

t	p	N	$(n_0 - 1) \cdot 10^6$	$(n_0^* - 1) \cdot 10^6$
18,26	13,329	100,39	809,6	812,5
18,46	13,344	100,37	809,1	811,3
17,79	13,322	100,52	809,7	811,9
18,76	12,888	96,72	808,1	810,6
16,61	7,977	60,37	809,4	810,9
16,44	7,978	60,39	809,1	810,4
20,51	8,079	60,46	811,2	812,8
18,86	25,307	190,63	810,1	810,8
17,16	19,867	150,43	810,1	813,2
16,26	19,239	146,24	810,8	812,3
16,06	13,207	100,28	810,0	812,4

Mittelwert: $(n_0 - 1) \cdot 10^6 = 809{,}8 \pm 0{,}3$
„ $(n_0^* - 1) \cdot 10^6 = 811{,}8 \pm 0{,}3$

$R_{H_2Se} = 12{,}100$
$R^*_{H_2Se} = 12{,}129$

Tabelle VI.

D_2Se. $\lambda_{Hg} = 5460{,}7 \cdot 10^{-8}$ cm.

t	p	N	$(n_0 - 1) \cdot 10_9$	$(n_0^* - 1) \cdot 10^6$
17,86	11,914	89,58	807,2	809,9
17,88	10,374	77,96	807,0	808,6
18,58	13,394	100,52	807,6	807,7
19,26	13,400	100,40	808,1	808,0
20,56	12,401	92,48	808,0	810,0

Mittelwert: $(n_0 - 1) \cdot 10^6 = 807{,}6 \pm 0{,}5$
„ $(n_0^* - 1) \cdot 10^6 = 808{,}8 \pm 0{,}5$

$R_{D_2Se} = 12{,}067$ $\quad R_{H_2Se} - R_{D_2Se} = 0{,}033$
$R^*_{D_2Se} = 12{,}085$ $\quad R^*_{H_2Se} - R^*_{D_2Se} = 0{,}044$

Wie man sieht, ist die Molrefraktion des „schweren" Selenwasserstoffs in allen Fällen kleiner gefunden worden als diejenige des „leichten" Selenwasserstoffs. Die Verhältnisse liegen insofern ähnlich wie im Falle des Wassers. Eine theoretische Abschätzung des Effektes erscheint im Falle der Selenverbindungen jedoch nicht möglich, da unseres Wissens noch keine Messungen der Ultraviolettabsorption des Selendeuterids vorliegen.

Oslo, Physikalisches Institut und Physikalisch-Chemisches Institut der Universität, Dezember 1935.

(Eingegangen 28. Dezember 1935.)

Bemerkung zur Thomsonschen Theorie der Kondensation an Ionen.

Von Erich Hückel.

Nach der Thomsonschen Theorie ist die Kondensation an Ionen[1]) bestimmt durch die beiden folgenden Effekte:

1. Erhöhung des Dampfdruckes infolge der Oberflächenspannung,
2. Erniedrigung des Dampfdruckes infolge einer Oberflächenladung bei einem Flüssigkeitströpfchen.

Die Thomsonsche Formel für den Dampfdruck eines Tropfens mit Oberflächenladung lautet:

$$\log \frac{p'}{p_0} = \frac{v''}{RT}\left(\frac{2\sigma}{r} - \frac{e^2}{8\pi r^4 D'}\right).$$

Dabei ist:

p' der Dampfdruck der Kugel vom Radius r,
p_0 der Dampfdruck einer ebenen ungeladenen Oberfläche,
σ die Oberflächenspannung,
v'' das Molvolumen der Flüssigkeit,
R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur,
D' die Dielektrizitätskonstante des Dampfes,
e die Ladung des Tropfens.

Der Ableitung dieser Formel liegt bei Thomson die Annahme zugrunde, daß die Ladung e gleichmäßig auf der Oberfläche der Kugel verteilt sei. Bei der Kondensation an einem einzelnen Ion oder Elektron kann diese Annahme nicht zutreffen[2]). Vielmehr wird sich die einzelne Ladung in der Mitte der Kugel befinden. Diese Ladung in der Mitte der Kugel ist aber nur dann einer Oberflächenladung nahe äquivalent, wenn die Dielektrizitätskonstante (DK.) D'' der Flüssigkeit sehr groß ist. Dann wirkt die Flüssigkeit praktisch wie ein Leiter und die Ladung in der Mitte der Kugel wie eine Oberflächenladung auf einer leitenden Kugel.

Die Ableitung, welche zu der Formel führt, die bei der Kondensation an einer einzelnen Ladung an Stelle der Thomsonschen Formel zu treten hat, verläuft folgendermaßen:

Wir setzen voraus, die Kugel sei so groß, daß

1. mit einer von r unabhängigen Oberflächenspannung gerechnet werden könne, und daß
2. die Flüssigkeit in den äußeren Volumteilen der Kugel durch eine DK. D'' charakterisiert werden könne, d.h. daß sich dort keine dielektrischen Sättigungserscheinungen mehr bemerkbar machen.

Dann ist das thermodynamische Potential der Flüssigkeitskugel[1]):

$$Z'' = U'' - TS'' + p''V'' = \zeta'' - \frac{e^2}{2D''r} + \text{const.}$$

(U'' Energie, S'' Entropie, p'' Druck, ζ'' thermodynamisches Potential pro Mol, ohne Rücksicht auf die elektrische freie Energie, N'' Anzahl Mole, $-\frac{e^2}{2D''r}$ + const. elektrischer Anteil der freien Energie; die Konstante hängt von der speziellen Wechselwirkung zwischen der Ladung und den sie in größerer Nähe umgebenden Flüssigkeitsschichten ab.)

Ferner ist mit entsprechenden Beziehungen das thermodynamische Potential des Dampfes[1]):

$$Z' = U' - TS' + p'V' = \zeta' N' + \frac{e^2}{2D'}\frac{1}{r}.$$

Die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung für den Übertritt von $\delta N'$-Molen lautet:

$$\delta(Z + Z'') = 0,$$

wobei $\delta N' = -\delta N''$; $p' = \text{const.}$, $p'' = \text{const.}$, $T = \text{const.}$

Wegen

$$\delta\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right) = 4\pi r^2 \delta r = v'' d N''$$

(v'' Molvolumen der Flüssigkeit)

wird sie

$$\zeta'' - \zeta' = v''\frac{e^2}{8\pi r^4}\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D''}\right).$$

Entwickelt man vom Gleichgewichtsdruck p_0 für die ebene Oberfläche aus unter Vernachlässigung der Kompressibilität der Flüssigkeit:

$$\zeta'' = \zeta_0'' + v''(p'' - p_0)$$

und sieht den Dampf als ideales Gas an:

$$\zeta' = \zeta_0' + RT \log \frac{p'}{p_0},$$

so folgt wegen $\zeta_0' = \zeta_0''$:

$$v''(p'' - p_0) - RT \log \frac{p'}{p_0} = v''\frac{e^2}{8\pi r^4}\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D''}\right).$$

1) J. J. Thomson, Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie 1890, S. 165.

2) Dies hat bereits Lenard an der Thomsonschen Theorie bemängelt. Ph. Lenard, Probleme komplexer Moleküle.

1) Der Thomsonschen Ableitung entspricht der Ansatz: $Z'' = \zeta'' N''$; $Z' = \zeta' N' + \frac{e^2}{2D'r}$.

Hierzu kommt die mechanische Gleichgewichtsbedingung

$$p'' - p' = \frac{2\sigma}{r}.$$

Elimination von p'' ergibt für den Dampfdruck p' der Kugel

$$\log\frac{p'}{p_0} = \frac{v''}{RT}\left[\frac{2\sigma}{r} - \frac{e^2}{8\pi r^4}\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D''}\right) + (p' - p_0)\right].$$

Wenn $v'/v'' >> 1$, was der Fall, wenn man genügend weit von der kritischen Temperatur entfernt ist, so kann man $\frac{v''}{RT}(p' - p_0)$ für nicht gar zu große $\frac{(p' - p_0)}{p_0}$ neben $\log\frac{p'}{p_0}$ streichen[1]). Dann wird

$$\log\frac{p'}{p_0} = \frac{v''}{RT}\left[\frac{2\sigma}{r} - \frac{e^2}{8\pi r^4}\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D''}\right)\right],$$

was, wie es sein muß, in der Grenze für $D'' \to \infty$ in die Thomsonsche Formel übergeht.

Die der Ableitung zugrunde gelegten, oben unter 1. und 2. angeführten Voraussetzungen dürften, wie bekannt, schon im Gebiet des Maximum des Sättigungsdruckes nicht mehr genügend zutreffen, da sich hierfür schon sehr kleine Radien (Größenordnung $6 \cdot 10^{-8}$ cm) ergeben.

1) Ist z. B. für Wasser $o° \frac{p' - p_0}{p_0} = 10$, d. h. $\log\frac{p'}{p_0} = \log 11 = 2{,}39$, so ist dagegen

$$\frac{v''}{RT}(p' - p_0) = \frac{v''}{v_0'}\frac{p' - p_0}{p_0} = \frac{18}{22400}\,10 = 8 \cdot 10^{-3}.$$

Der Wert $\frac{p' - p_0}{p} = 10$ wird nicht erreicht.

Stuttgart, Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule, den 18. November 1935.

(Eingegangen 9. Dezember 1935.)

Gravitationskonstante und Zahl der Massenteilchen im Weltall.

Von Hans Ertel.

Eine dimensionsanalytische Betrachtung zeigt, daß die Gravitationskonstante (f) von der spezifischen Ladung der Elektronen (e/m) wie folgt abhängen könnte[1]):

$$f = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \beta, \qquad (1)$$

worin β einen Zahlenfaktor von der Größenordnung 10^{-43} bedeuten müßte. Nun folgt in der Tat aus Gleichungen über den Zusammenhang universeller physikalischer Konstanten, die ich an anderer Stelle[1]) abgeleitet habe:

$$f = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{8\sqrt{N}}, \qquad (2)$$

worin N die Zahl der Protonen (= Zahl der Elektronen) im Weltall bedeutet und

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = {}^1/_{137} \qquad (3)$$

die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante darstellt, der wir hier den Eddingtonschen Wert $^1/_{137}$ gegeben haben.

Nach Eddingtons Vermutung[2]) ist nun die Gesamtzahl $(2N)$ der elementaren Massenteilchen im Weltall (N Elektronen und N Protonen)[3]) durch

$$2N = 136 \cdot 2^{256} = 136 \cdot 2^{136} \cdot 2^{120} \qquad (4)$$

gegeben, worin

$\left.\begin{matrix}136\\120\end{matrix}\right|$ = Anzahl der Kombinationen der 16 Dirac-Funktionen $\psi_r(\zeta, r = 1,2,3,4)$ zur 2. Klasse $\left\{\begin{matrix}\text{mit}\\\text{ohne}\end{matrix}\right\}$ Wiederholung

bedeuten. Dann liefert aber die Gleichung (2) mit[4]) $e/m = 1{,}766 \cdot 10^8$ int. coul. gr^{-1} und $N = 68 \cdot 2^{256}$ den um etwa 40 Proz. zu großen Wert $f = 9{,}127 \cdot 10^{-8}$ dyn $cm^2\,gr^{-2}$. Nimmt man aber an Stelle von (4) die noch einfacher gebaute Zahl

$$2N = 256 \cdot 2^{256}, \qquad (5)$$

also

$$N = \frac{2^{136} \cdot 2^{137}}{2^{10}} \quad (= 1{,}482 \cdot 10^{79}) \qquad (6)$$

an, so wird nach (2):

$$f = 6{,}652 \cdot 10^{-8}\,\text{dyn}\,\text{cm}^2\,\text{gr}^{-2}, \qquad (7)$$

1) P. W. Bridgman, Theorie der physikalischen Dimensionen. Deutsche Ausgabe von H. Holl. Leipzig-Berlin 1932, S. 92.

1) H. Ertel, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin 1935, S. 1. (Es ergibt sich die obenstehende Gleichung (2) aus den Gleichungen (6a) und (9) der hier zitierten Arbeit.)

2) A. S. Eddington, Die Naturwissenschaft auf neuen Bahnen (New pathways in science); deutsche Übersetzung von W. Westphal. Braunschweig 1935, S. 241.

3) Bezüglich der Neutronen wollen wir uns hier der Eddingtonschen Auffassung anschließen (a. a. O., S. 26), wonach deren Masse auf die der Protonen und Elektronen zurückgeführt werden kann.

4) Handbuch der Physik (Geiger-Scheel), Bd. II, Berlin 1926, S. 506.

in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung[1]). Die Schreibweise (6) für N zeigt das Auftreten der beiden „Eddingtonschen Zahlen" 136 (Erklärung oben) und 10 (= Anzahl der Kombinationen der 4 Weltkoordinaten x_i zur 2. Klasse mit Wiederholung = Anzahl der Einsteinschen Gravitationspotentiale g_{ik}), die zusammen das Massenverhältnis m_+/m von Proton und Elektron bestimmen[2]).

1) Ebenda, S. 491.
2) A. S. Eddington, Proc. Roy. Soc. London, A, CXXXIV, 1932, S. 524; vgl. auch: Physikal. Zeitschr. 1935, S. 464.

Meteorologisches Institut der Universität Berlin, 28. Dezember 1935.

(Eingegangen 30. Dezember 1935.)

Bemerkungen zu: „Die Lorentz-Transformation als ein Element der klassischen Mechanik" von Hugo Dingler und Max Steck[1]).

Von Wilhelm Dieckvoß und Karl Müller.

Die Ausführungen geben keine Deutung des Ergebnisses des Michelson-Versuchs; das geht schon daraus hervor, daß der in Kapitel II (Galilei- und Lorentz-Transformation) behandelte ballistische Vorgang, der die Verbindung zum Michelson-Versuch herstellen soll, zur Ableitung der endgültigen Formeln nicht benötigt wird. Die Rechnungen in Kapitel II sind bis zu den Gleichungen

$$w'/c = t', \; w''/c = t''$$

einschließlich für die Umformung der Gleichungen (2), (2a), auf die es doch ankommt, entbehrlich. Durch die Rechnung wird nur bewiesen, daß durch Einführung der Ausdrücke

$$t' = t - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{x' + x''}{2}, \quad t'' = t + \frac{u}{c^2} \cdot \frac{x' + x''}{2}$$

und

$$v = \frac{2u}{1 + u^2/c^2}$$

die aus den Gleichungen (2), (2a) durch Elimination von X folgende Gleichung

$$x' = x'' - 2ut \quad \text{(Galilei-Transformation)}$$

und die Beziehung zwischen t' und t'' die Gestalt einer Lorentz-Transformation annehmen. Die Endgleichungen sind daher nur rein formale Umschreibungen der Anfangsgleichungen, worauf ja auch von den Verfassern selbst hingewiesen worden ist.

Bei einer Transformation kommt es nicht nur auf ihre Gestalt an, sondern auch darauf, was sich so transformiert; die Größen in den Endgleichungen haben nicht die Bedeutung, die sie haben müßten, damit die Transformationen Lorentz-Transformationen sind.

(Eingegangen 5. Februar 1935.)

1) Physik. Zeitschr. **36**, 46, 1935.

Erwiderung auf die Bemerkungen der Herren Wilhelm Dieckvoss und Karl Müller.

Von Hugo Dingler und Max Steck.

1. Nirgends ist angedeutet, daß die Arbeit eine „Deutung des Ergebnisses des Michelson-Versuches", d. h. also eine kausale Erklärung desselben beabsichtige. Vielmehr ist auf S. 46 das Gegenteil deutlich betont.

2. Das nun folgende ist eine Fehlbehauptung. Der ballistische Vorgang, d. h. die von den Herren Dieckvoss und Müller als ohne Bedeutung bezeichneten Teile, dienen zur Gewinnung der Ausdrücke:

$$t' = t - \frac{u}{c^2} \cdot X \text{ usw.}$$

Nach Absicht sollen ja diese aus dem vorausgesetzten Arrangement gedanklich gewonnen werden, der Gedankengang dieser Gewinnung ist also nicht bedeutungslos, sondern gedanklich entscheidend.

3. Es wird hier nicht eine Gleichung durch Einführung passender Ausdrücke in eine bestimmte Gestalt gebracht, was so gar nicht beliebig möglich wäre. Sondern aus der Betrachtung des Ausgangsarrangements ergeben sich die passenden Ausdrücke und die Gestalt von selbst.

4. Das Kennzeichen analytischer Transformationen besteht in ihren Formeln. Im Übrigen hat die Lorentz-Transformation bei uns noch im Speziellen den Charakter einer Koordinatentransformation von Bewegungen. Mehr wurde nicht behauptet.

5. Die Ableitung zeigt eben, daß man zur Gewinnung der formalen Lorentz-Transformation die Hypothesen der speziellen Relativitätstheorie – etwa Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und das dort sogenannte „Relativitätsprinzip" – gar nicht braucht, sondern daß diese allein aus den klassischen Annahmen über die Zeit für den Fall einer besonderen symmetrischen Anordnung des Systems ableitbar ist.

(Eingegangen 14. Juni 1935.)

Bemerkung zu der Arbeit von Hugo Dingler und Max Steck: „Die Lorentz-Transformation als ein Element der klassischen Mechanik“ [1].

Von Ernst Baumgardt.

In genannter Arbeit wurde gezeigt, daß man, von einem dem Michelson-Experiment äquivalenten mechanischen Bewegungsproblem und seiner Beschreibung durch eine Galilei-Transformation ausgehend, durch einfache Umbenennung von in diesen Transformationen vorkommenden Größen zu einer Lorentz-Transformation gelangen kann.

Dieser Umstand veranlaßt die Verfasser, folgende Schlüsse zu ziehen:

„Damit ist gezeigt, daß beim rein klassischen Ansatz (Galilei-Transformation) eines ballistischen Vorganges, der dem Michelson-Versuch entspricht, sich die Lorentz-Transformation als Verbindungsrelation zwischen den drei Koordinatensystemen ergibt. Die Lorentz-Transformation gilt damit für diese spezielle Anordnung oder ihr äquivalente“ [2].

Und an anderer Stelle:

„Was wir demgegenüber zeigen, ist, daß die Lorentz-Transformation schon aus den rein klassisch angesetzten Bewegungsumständen des Versuches sich ergibt, und daß daher ihre unabhängige Existenz durch Formulierung des Resultates des Michelson-Versuches nur eine scheinbare ist“ [3].

Um die Anfechtbarkeit vorstehender Schlußfolgerungen völlig klar zu machen, vergleichen wir die zugrunde gelegten Galilei-Transformationen

$$x' = x - ut$$
$$x'' = x + ut$$

mit den durch Umformung erhaltenen Transformationen

$$x' = \frac{x'' - vt''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x'' + t''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x'' = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t'' = \frac{\frac{v}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hierbei ist

$$v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}; \quad t' = t - \frac{u}{c^2}x; \quad t'' = t + \frac{u}{c^2}x.$$

1) Physik. Zeitschr. **36**, 46–50, 1935.
2) Physik. Zeitschr. **36**, 50, 1935.
3) Physik. Zeitschr. **36**, 47, 1935.

Mit dieser Umformung ist aber nur gezeigt, daß für einen Massenpunkt P, der sich in einem Ruhsystem K mit der Geschwindigkeit $|c|$ bewegt, (K' ist relativ zu K mit der Geschwindigkeit $+u$, K'' relativ zu K mit $-u$, bewegt) absoluttheoretisch die Lorentz-Transformation gilt, wenn man in ihr die Relativgeschwindigkeit $2u$ von K' gegenüber K'' durch

$$v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

ersetzt.

Die Verfasser betonen ausdrücklich, daß sie sich jeder physikalischen Interpretation der Größe v enthalten. Laut Definition ist aber die in jeder beliebigen Lorentz-Transformation auftretende und allgemein mit v bezeichnete Größe die Relativgeschwindigkeit der beiden Koordinatensysteme, deren Koordinaten durch eben diese Lorentz-Transformation zueinander in Beziehung gebracht werden. Die hier vorliegende Transformation beschreibt also den ursprünglichen Bewegungsvorgang nur so lange, als man sie als Galilei-Transformation auffaßt (sie ist ja nur die identische Umformung einer solchen). Sobald man sie aber als Lorentz-Transformation betrachtet, beschreibt sie einen Bewegungsvorgang in zwei von den ursprünglichen verschiedenen Koordinatensystemen, deren Relativgeschwindigkeit

$$v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

ist. Es ist also in der in Rede stehenden Arbeit erwiesen worden, daß, wenn man in den den Michelson-Versuch beschreibenden klassischen Galilei-Transformationen die Relativgeschwindigkeit $2u$ der beiden Koordinatensysteme willkürlich durch

$$\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

ersetzt, man den durch das Experiment bekannten Nulleffekt errechnet. Diese willkürliche und den klassischen Boden verlassende Operation erzwingt also dasselbe Ergebnis wie die Forderung der speziellen Relativitätstheorie, daß

$$\sum_{n=1}^{4} x_n^2 = \sum_{n=1}^{4} x_n'^2 = 0,$$

daß also die Lichtausbreitung für alle gleichförmig bewegten Beobachter mit der gleichen Geschwindigkeit erfolgt.

Die Verfasser haben demnach nur einen neuen analytischen Ausdruck des Grundaxiomes der speziellen Relativitätstheorie gefunden, einen Ausdruck, dem jedoch im Gegensatz zu dem erwähnten Axiom die Anschaulichkeit des physikalischen Inhaltes mangelt.

Entgegen der oben zitierten Behauptung der Verfasser ist also weiterhin die Lorentz-Transformation als der von der klassischen Mechanik unabhängige mathematische Ausdruck einer physikalischen Aussage zu bezeichnen.

Paris, Ecole Municipale de Physique et Chimie Industrielles.

(Eingegangen 2. April 1935.)

Erwiderung auf die Bemerkung des Herrn Ernst Baumgardt.

Von Hugo Dingler und Max Steck.

Herr Baumgardt hat mit Klarheit den Kern der rein formalen Seite unserer Rechnungen wiedergegeben. Diskrepanz besteht nur hinsichtlich der Deutung und des Methodischen.

1. Worauf es uns ankam, war lediglich, zu zeigen, daß die sog. Lorentz-Transformation durch gewisse Umbenennungen schon im klassischen Bereich auftritt. Wenn hierbei die Ersetzung $v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$ (Dimension einer Geschwindigkeit) als willkürlich erscheinen kann, so ist sie gewiß nicht willkürlicher als die Ersetzung $\frac{w'}{c} = t'$. Wir haben uns dabei ausdrücklich jeder physikalischen Interpretation enthalten. Um dieses Resultat zu zeigen, mußten wir aus formalen Gründen im Kerne von demselben Ansatz des Michelson-Versuches ausgehen, wie ihn die Relativitätstheorie benutzt. Unter dieser Voraussetzung wäre aber wohl unsere Behandlung vorzuziehen, da sie rein mathematisch ist und keine allgemeinen Hypothesen aufstellt.

2. An sich ist es meines Erachtens methodisch nicht vertretbar, beim mathematischen Ansatz des Michelson-Experimentes, das ja gerade zeigt, daß die Erdbewegung nicht in den Effekt eingeht, trotzdem zwangsweise die Erdbewegung einzuführen. Vermeidet man dieses methodisch ungerechtfertigte Verfahren, so gelangt man überhaupt zu keiner Lorentz-Transformation.

3. Herr Baumgardt betont (vorletzter Absatz) als Vorzug des Ausgangspunktes der Relativitätstheorie die Anschaulichkeit, was ich nur begrüßen kann, um so mehr, als es heute ein wenig ungewöhnlich ist. Aber das Prinzip möglichster Anschaulichkeit kann nicht heißen: Anschaulichkeit um jeden Preis. Es ist methodisch nicht zu rechtfertigen, ein physikalisches Messungsergebnis, das zunächst unerwartet und isoliert auftritt, wie das Ergebnis des Michelson-Versuches, durch eine Annahme zu „erklären" (d. h. aus ihr abzuleiten und dann diese Annahme dadurch als bewiesen zu betrachten), die eine weltweite Extrapolation darstellt, und in diesem Falle sogar alle übrige Physik als falsch ergibt, bloß deshalb, weil diese Annahme anschaulich ist.

Glaubt jemand trotz Absatz 2 die Erdbewegung beim Ansatz des Michelson-Versuches hereinnehmen zu müssen, was wir bestreiten, so würde unsere Ableitung, wenn man sie physikalisch interpretieren wollte, was wir nicht tun, den Gewinn haben, dieses Messungsergebnis in einer von allen Hypothesen unbelasteten Nüchternheit und mathematischen Durchsichtigkeit darzustellen, und fern von jeder voreiligen Ausweitung auf ein „physikalisches Weltbild". Bei einem in seinen tieferen Untergründen noch ganz undurchsichtigen Messungsresultat wie dem Michelsonschen wäre das gewiß die dem eigentlichen Sinn aller strengen Wissenschaft angemessenere Linie. Dabei bedient sich unsere Ableitung des gewiß unbestreitbaren neuen Zeitaxioms von Sandgathe, was an sich eine neue Situation schafft.

4. Wenn Herr Baumgardt im letzten Absatz ausspricht, daß die Lorentz-Transformation als der von der klassischen Mechanik unabhängige mathematische Ausdruck einer physikalischen Aussage zu bezeichnen sei, so sagt er wohl etwas mehr, als er beweisen kann. Dieser Ausdruck hängt zunächst an der unseres Erachtens ganz ungerechtfertigten und gezwungenen Hereinnahme der Erdbewegung in den Ansatz des Michelson-Versuches. Methodisch ist aber ferner zu sagen, daß ein solcher mathematischer Ausdruck an sich zunächst weder abhängig noch unabhängig von der klassischen Mechanik genannt werden kann. Stellt er das Messungsergebnis innerhalb einer gewissen, zu fordernden Genauigkeit dar, so besitzt er ein gewisses momentanes Interesse, das aber noch lange nichts Endgültiges aussagt, da keinerlei Beweis vorliegt, daß nicht auch andere Ausdrücke dieses leisten. Ist schon der Ausdruck selbst in dieser Hinsicht unsicher, so erhebt sich die Unsicherheit sozusagen ins Quadrat, wenn man durch ihn gewisse Hypothesen bewiesen sein läßt, aus denen man ihn mathematisch ableiten kann, da keinerlei Beweis vorliegt, daß nicht auch andere Hypothesen dieses leisten. Solches Vorgehen kann gelegentlich eine gewisse

Rechtfertigung haben, wenn diese Hypothesen durch den ganzen Aufbau der übrigen Physik gestützt sind. Wenn sie aber von diesem ganz unabhängig, ja ihm völlig entgegen sind, wie in der Relativitätstheorie, dann fällt auch diese Möglichkeit hinweg, und es bleibt nichts übrig als unbegrenzte Unsicherheit (wenn man von tieferen methodischen Überlegungen absieht, welche die Unsicherheit zu einer Unmöglichkeit erheben).

Die Behauptung, daß die Lorentz-Transformation in der Relativitätstheorie unabhängig von der klassischen Mechanik sei, beruht aber einzig und allein auf der Hypothese

$$\sum_1^4 x_n^2 = \sum_1^4 x_n'^2 = 0\,,$$

deren methodische Unhaltbarkeit schon aus den kurzen vorstehenden Bemerkungen einleuchten dürfte. Selbst wenn wir einmal für den Moment die Art der Gewinnung der Lorentz-Transformation durch den mathematischen Ansatz des Michelson-Versuches als vertretbar unterstellen (siehe Absatz 2), so wäre noch lange nicht entschieden, ob dieser mathematische Ausdruck nicht auch aus rein klassisch angesetzten Umständen, genau oder hinreichend approximativ, zu gewinnen wäre. Die tiefere Erforschung dieser Lichtvorgänge, die ja erst am allerersten Anfang steht, könnte dazu noch die mannigfaltigsten Möglichkeiten bieten.

München, Universität und Technische Hochschule.

(Eingegangen 14. Juni 1935.)

Antwort auf die vorstehende Erwiderung der Herren Hugo Dingler und Max Steck.

Von Ernst Baumgardt.

In meiner Bemerkung habe ich mich darauf beschränkt, zwei in der Arbeit der Herren Dingler und Steck gezogene Schlußfolgerungen – die Zitate sind durch die Indizes (2) und (3) gekennzeichnet – einer Kritik zu unterziehen.

Zu (2) habe ich gezeigt, daß im klassischen Bereich die durch Umbenennungen erhaltene Lorentz-Transformation nicht für die gewählte Anordnung oder ihr äquivalente gilt, sondern daß sie einen anderen Bewegungsvorgang beschreibt. In der vorstehenden Erwiderung wird dem nicht widersprochen.

Zu 3 zeigte ich, daß die Lorentz-Transformation sich nicht aus den klassisch angesetzten Bewegungsumständen des Versuches ergibt, sondern daß sie durch eine klassisch unmotivierte und ohne physikalische Begründung nur als Mittel zum Zweck angesetzte Änderung der Relativgeschwindigkeit zweier Koordinatensysteme erzwungen wird.

In Absatz 1 der vorstehenden Erwiderung wird die Willkür der von den Verfassern vorgenommenen Substitution nicht bestritten. Damit ist aber die Behauptung, daß die Lorentz-Transformation im klassischen Bereich auftrete, unvereinbar.

Zu Absatz 3 der vorstehenden Erwiderung möchte ich bemerken, daß ich auf die Anschaulichkeit des physikalischen Inhaltes des Grundaxioms der Relativitätstheorie anspielte, um demgegenüber auf den Mangel an physikalischer Anschaulichkeit der von den Verfassern eingeführten Substitution hinzuweisen.

Die in den Absätzen 2 und 4 vorgebrachten Argumente sind, selbst im Kern, in der Originalarbeit der Verfasser nicht enthalten; in der Tat stellen sie auch gar keine Verteidigung der Methode der Verfasser dar, welche in der Behandlung des Michelson-Versuches einen mitbewegten Äther ja gar nicht in Erwägung ziehen konnten. Da im übrigen der mathematische Ansatz des Michelson-Versuches seiner Ausführung vorhergegangen ist, so kann man schwierig einsehen, warum man die Erdgeschwindigkeit nicht in ihn hätte einführen sollen. Ob die Erdbewegung in den Effekt einginge, sollte ja durch den Versuch eben erst entschieden werden.

Paris, den 15. September 1935.

(Eingegangen 19. September 1935.)

Schlußwort auf die vorstehende Erwiderung von Herrn Baumgardt.

Von Hugo Dingler und Max Steck.

1. Die mathematisch definierte Lorentz-Transformation kann nicht einmal als Lorentz-Transformation aufgefaßt werden und dann wieder nicht. Daß sie auf Grund formaler Umformungen auch nach klassischem Ansatz auftritt, haben wir bewiesen. Nur das kann in wissenschaftlich einwandfreier Form ausgesagt werden und nur darüber kann unseres Erachtens die Diskussion gehen. Wir betonen nochmals, daß uns irgendwelche Interpretationen dabei fernlagen, womit die auf Interpretationen bezüglichen Einwände gegenstandslos werden. Eine Lorentz-Transformation, die keine solche sein

soll, erscheint uns als etwas Mystisches und ist jedenfalls von unseren Herren Opponenten nicht klar definiert.

2. Was Herr Baumgardt zu Absatz 3 sagt, wiederholt nur unsere Aussage, daß wir formal diesen Nachweis geleistet haben. Es wird dabei nur in methodisch ungerechtfertigter Weise das formale Element mit Deutungen vermengt.

3. Die vermeintliche „Anschaulichkeit des physikalischen Inhaltes des Grundaxioms der Relativitätstheorie" besteht lediglich in einer gewissen geometrischen Vorstellung, die allein dadurch noch keinen physikalischen Inhalt erhält, sondern nur eine ad hoc gemachte, in geometrische Form gekleidete Hypothese darstellt, die zu ihrer physikalischen Geltung sich aber vor allgemeineren methodischen Prinzipien erst rechtfertigen müßte, wozu sie nicht in der Lage ist.

4. Die Argumente in den Absätzen 2 und 4 unserer (ersten) Entgegnung mußten u. a. angeführt werden, da Herr Baumgardt in den Schlußsätzen seiner Bemerkung sich auf das „Grundaxiom der speziellen Relativitätstheorie" bezieht und dessen „physikalischen Inhalt" betont. Die historische Zufälligkeit, daß „der mathematische Ansatz des Michelson-Versuches seiner Ausführung vorhergegangen ist" kann gewiß nicht die objektive wissenschaftliche Behandlung seiner Ergebnisse präjudizieren. Diese muß vielmehr völlig unabhängig von solchen Konstellationen und unabhängig von jeder vorgefaßten Meinung immer von neuem in Angriff genommen werden, und eine dabei erreichte Auffassung immer von neuem der unbefangenen wissenschaftlichen Überdenkung unterstehen. Erst wenn sich eine solche nach strengen und genau begründeten methodischen Prinzipien einmal als die allein mögliche erwiesen haben sollte, kann die Frage als endgültig erledigt betrachtet werden. Denn wie sollte ein mathematisch „strenger Erweis" dafür aussehen, daß die Lorentz-Transformation „der einzige Ausdruck ist, der das Meßergebnis wiedergibt"?! — Wie sollte ferner nachweisbar sein, daß die Lorentz-Transformation nur durch eine nichtklassische Annahme erhalten werden kann?! — Die Anführung des rein historischen Umstandes zur Begründung der Hereinnahme der Erdbewegung in die Erklärung des Michelson-Versuches zeigt, wie problematisch diese Hereinnahme sich darstellt, auf der die sog. Relativitätstheorie beruht[1]).

Damit dürften für den Moment die Meinungen des Für und Wider, wenigstens in ihrer Gegenüberstellung, geklärt sein.

1) Für Näheres bezüglich der obigen methodischen Gesichtspunkte kann auf H. Dingler, Grundlagen der Geometrie, ihre Bedeutung für Philosophie, Mathematik, Physik und Technik, Stuttgart 1933, verwiesen werden.

München, Universität und Technische Hochschule.

(Eingegangen 9. Oktober 1935.)

BESPRECHUNGEN.

W. N. Bond, Probability and random errors. 8°. VIII u. 141 S. London 1935. Edward Arnold and Co. Price 10/6 net.

Das Büchlein wendet sich in erster Linie an Studierende der Physik und Chemie. Diesen bietet es, ohne erhebliche Ansprüche an mathematische Vorkenntnisse zu stellen und ohne auf die logische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzugehen, eine auf die Praxis Rücksicht nehmende Einführung in die Fehler- und Ausgleichstheorie. Demgemäß wird insbesondere jede theoretische Darlegung sogleich durch numerische Beispiele aus den eingangs erwähnten Disziplinen erläutert. Das angenehm verständlich geschriebene Werk kann unseres Erachtens nur empfohlen werden. Um den Umfang des Gebotenen ersichtlich zu machen, sei folgender Auszug aus dem Inhaltsverzeichnis gegeben: 1. und 2. Kapitel: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einschließlich Laplacescher und Poissonscher Näherungsformel; 3. und 4. Kapitel: Mittelwerte, Fehler; 5. Kapitel: Kombination von Beobachtungen; 6. Kapitel: Lineare Abhängigkeiten; Methode der kleinsten Quadrate; Korrelation; 7. Kapitel: Anpassung von Kurven; 8. Kapitel: Periodische Kurven; 9. Kapitel: Vermischte Beispiele. Haupt.

C. N. Hinshelwood und A. T. Williamson, The reaction between Hydrogen and Oxygen. Gr.-8°. I und 108 Seiten. Mit 7 Figuren. Oxford 1934. Clarendon Press. Preis 8 s. 6 d.

Zu dem klassischen Beispiel einer Kettenreaktion, der Chlorknallgasvereinigung, sind in letzter Zeit andere genau studierte Umsetzungen hinzugekommen. Dazu gehört vor allem die Verbrennung von Wasserstoff mit Sauerstoff, die so weit untersucht ist, daß eine Beschreibung ihrer Verhältnisse durch eine Monographie gerechtfertigt erscheint.

Die Verfasser behandeln nacheinander die heterogenen, photochemischen und homogenen Reaktionsmöglichkeiten. Besondere Berücksichtigung haben die merkwürdigen, von Hinshelwood selbst am Knallgas entdeckten „kritischen Explosionsgebiete" gefunden, die durch Kettenverzweigung zustande kommen. Bei der Deutung der

Versuchsergebnisse wird berechtigterweise den Atom- und Radikalketten der Vorzug gegenüber den noch sehr hypothetischen Energieketten gegeben. Wenn auch die Frage des wahren Reaktionsmechanismus der Knallgasvereinigung für die verschiedenen Temperaturgebiete noch nicht eindeutig beantwortet werden kann, so verstehen die Autoren es doch, das gesamte Problem in sich geschlossen zu behandeln. Auf diese Weise kann das Gefühl der Unbefriedigung, das beim Studium reaktionskinetischer Schriften sich sonst so leicht einzustellen pflegt, nicht aufkommen. So darf das Buch allen empfohlen werden, die sich über die Knallgasreaktion zu unterrichten wünschen.

Clusius.

Max Planck, Die Physik im Kampf um die Weltanschauung. Vortrag, gehalten am 6. März 1935 im Harnack-Haus. 32 S. Leipzig 1935. Joh. Ambr. Barth. MR 1.50.

Dieser Vortrag ist eine der schönen Bekenntnisschriften, in denen Planck während der letzten Jahre wiederholt zu den allgemeinen erkenntnistheoretischen und ethischen Fragen Stellung genommen hat; der Vortrag ist in einfacher, klarer Sprache gehalten und von hohem, sittlichem Ernst durchdrungen.

Einige Stufen des Gedankenganges mögen in Stichworten hervorgehoben werden: Der menschlich und zeitlich bedingte Ausgang aller Forschung, die Zurückdrängung des Subjektiven durch verfeinerte Messungen, die Schranke, die die Meßgenauigkeit in dem Wirkungsquantum findet. Bedeutet diese Schranke ein Versagen der Kausalität oder ist sie nicht vielmehr ein Hinweis auf die enge kausale Verknüpfung zwischen den realen Vorgängen und den verfeinerten Meßinstrumenten? Gedankenexperimente, die den ebenfalls nur gedanklich auszuführenden Konstruktionen des Mathematikers entsprechen, können berufen sein, die Schranke zu überwinden. Solche Experimente werden angestellt in dem „Glauben einerseits an die Realität der Außenwelt, andererseits an das Walten einer höheren Vernunft in oder über ihr". Das Versagen der klassischen Kausalität in den Fragen der Atomphysik könnte seinen Grund haben in den Randbedingungen, die in der Quantentheorie zu den Differentialgleichungen der klassischen Physik hinzutreten.

Die Willensfreiheit ist uns durch unser Bewußtsein unmittelbar gegeben. Das Problem der Willensfreiheit, d. h. ihr Widerstreit mit der Kausalität, wird als Scheinproblem erklärt. Die übernationale Stellung der Physik verpflichtet sie in besonderem Maße zur Wahrhaftigkeit und Gerechtigkeit, den Grundvoraussetzungen alles staatlichen und zwischenstaatlichen Lebens.

A. Sommerfeld.

NACHRICHTEN.

Preisausschreiben der Auerforschungsstiftung.

Der Vorstand der Auerforschungsstiftung, Vorsitzender Professor Dr. P. Debye, Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik, hat die Preisaufgaben für das Jahr 1936 festgestellt.

1. Entwicklung eines Gas-Straßengeleuchtes.
2. Wege zur analytischen Trennung der seltenen Erden.
3. Beiträge zur möglichst einfachen Darstellung von reinem Ferro-Thor, Nickel-Thor und Cupro-Thor.

Für die Lösung der ersten Aufgabe ist ein Preis von RM 3000, für die Lösung der beiden anderen Aufgaben von je RM 1000 ausgesetzt.

Die Einreichung der Arbeiten soll bis zum 15. Juni 1936 erfolgen. Das Ergebnis wird im September 1936 öffentlich bekanntgegeben.

Alle Einsendungen, Zuschriften und Anfragen sind zurichten an das Sekretariat der Auerforschungsstiftung, Berlin O 17, Rotherstr. 16—19.

XV. Ferienkurs in Spektroskopie, Interferometrie, Nephelometrie und Refraktometrie in Jena vom 5.—11. März 1936. Anmeldungen bis spätestens 3. März an Herrn A. Kramer, Jena, Wilhelm-Frick-Straße 72.

Hauptversammlung des Vereins deutscher Chemiker 1936 in München vom 7. bis 11. Juli. Die diesjährige 49. Hauptversammlung des Vereins deutscher Chemiker wird als Reichstreffen der deutschen Chemiker vom 7. bis 11. Juli in München stattfinden.

Ernannt: Dr. Bruno Thüring in Heidelberg zum Observator an der Sternwarte daselbst, der Dozent für Chemie an der Universität Jena Dr. Kurt Maurer zum a. o. Professor ebenda, der a. o. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Tübingen Dr. Alfred Kliegl zum ord. Professor ebenda, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Rudolf Mentzel zum ord. Professor für angewandte Chemie insbesondere Wehrchemie ebenda, der a. o. Professor für reine Mathematik und mathematische Physik an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Georg Wiarda zum ord. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart, der nichtbeamtete a. o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Werner Braunbek zum a. o. Professor für theoretische Physik an der Universität Tübingen, der Dozent für technische Physik an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Ernst Lübcke zum a. o. Professor daselbst.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Bonn Dr. Otto Toeplitz.

Ehrung: Dem früheren Leiter des Ammoniaklaboratoriums der I.G.-Farbenindustrie in Oppau Dr. phil., Dr.-Ing. e. h., Dr. agr. h. c. Paul Alwin Mittasch in Heidelberg die Liebig-Kekulé-Plakette des Liebighaus in Darmstadt verliehen.

Gestorben: Der a. o. Professor für Experimentalchemie an der Universität Wien Hofrat Dr. Julius Zellner, der frühere Abteilungsleiter für Metallchemie insbesondere Korrosion und Metallschutz an der Chemisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin Oberregierungsrat Dr. Emil Maass, der ord. Professor für Hochfrequenzphysik und Photographie an der Technischen Hochschule Hannover Dr. Julius Herweg.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Leipzig. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — DA. IV. Vj. 1935: 1400. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.